

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXX.

I. Ueber die Schwingungen fallender Tropfen;
von Philipp Lenard.(Hierzu Taf. III Fig. 1–3^b.)

1. Im Folgenden ist versucht, aus den ellipsoidischen Schwingungen frei fallender Tropfen, durch welche Savart¹⁾ zuerst die Bäuche und Knoten der zerfallenen Wasserstrahlen erklärte, die Magnus stroboskopisch beobachtete²⁾ und Lord Rayleigh³⁾ berechnete, die Oberflächenspannungen zu finden.

Die Veranlassung zu dieser Arbeit gab mir eine Aufforderung des Hrn. Geheimrath v. Helmholtz, die Oberflächenspannungen von Flüssigkeiten auf eine neue Art zu messen, und ich verfiel auf jene Schwingungen, weil man erwarten konnte, die zwei Hauptschwierigkeiten solcher Messungen, die uns Prof. Quincke in einer langen Reihe von Untersuchungen über Capillarerscheinungen⁴⁾ kennen gelehrt hatte, zu umgehen: einmal den Randwinkel, dessen Abhängigkeit von ausserordentlich dünnen, variablen Schichten an den Oberflächen der festen Körper ihn bei nicht vollständig benetzenden Flüssigkeiten so unbeständig macht, und zweitens die Abnahme der Spannung der Oberflächen in der Zeit zwischen Bildung und Messung derselben. Ein Randwinkel kommt in der That bei den Schwingungen dieser frei fallen-

1) Savart, Ann. de chim. et de phys. 53. p. 337. 1833.

2) Magnus, Pogg. Ann. 95. p. 1. 1855 u. 106. p. 1. 1859.

3) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. 29. p. 71. 1879.

4) Quincke, Pogg. Ann. 105. p. 1. 1858; 134. p. 156. 1868; 135. p. 621. 1868; 137. p. 402. 1869; 138. p. 141. 1869; 139. p. 1. 1870; 160. p. 337 u. 560. 1877. Wied. Ann. 2. p. 145. 1877. (Das Verständniss dieser Untersuchungen ergibt sich nur im Zusammenhange aller.)

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXX.

den Tropfen gar nicht in Betracht, und ihre immer frisch sich bildende Oberfläche kann nach einer beliebig feststellbaren kurzen Zeit beobachtet werden, was ein besonderer Vorzug dieser Art der Beobachtung ist und sie insbesondere bei Flüssigkeiten, deren Spannung sich stark ändert, interessant macht; aber es ist eigenthümlich, dass die Veränderlichkeit bei dieser Bewegungserscheinung von Oberflächen sehr stark hervortritt, sodass sich in dieser Beziehung meine Erwartung nicht ganz bestätigt hat. Umsoweniger darf ich es hier unerwähnt lassen, dass Prof. Eötvös durch Einschmelzen in Glaskugeln, aus denen die Luft durch Kochen ausgetrieben wurde, die Spannung des Wassers ganz constant erhalten hat. Seine Untersuchung¹⁾, welche vor nicht langer Zeit erst in diesen Annalen im Auszuge erschien, war mir vordem leider unbekannt.

2. Sei die Form eines freien Tropfens zu irgend einer Zeit t gegeben als Rotationsfläche durch den Meridianschnitt, dessen Radiusvector r als Function des Polarwinkels Θ entwickelt sei nach Kugelfunctionen $P_n(\cos \Theta)$:

$$r = a_0 + a_1 P_1(\cos \Theta) + a_2 P_2(\cos \Theta) + \dots + a_n P_n(\cos \Theta) + \dots,$$

und angenommen, dass sämtliche Grössen $a_1, a_2 \dots a_n, \dots$, welche die Amplituden bestimmen und Functionen der Zeit sind, gegen a_0 verschwindend klein bleiben, so findet Lord Rayleigh in der schon citirten Untersuchung:

die potentielle Energie der Oberfläche

$$P = 2\pi\alpha \sum (n-1)(n+2)(2n+1)^{-1} a_n^2 \text{ und}$$

die kinetische Energie der Massentheile

$$K = 2\pi\sigma a^3 \sum (2n+1)^{-1} n^{-1} \left(\frac{da_n}{dt}\right)^2,$$

worin α die Spannung längs eines Streifens der Oberfläche von der Breite Eins, a den Radius einer Kugel, die das Volumen des Tropfens hat, und σ seine Dichte bedeutet. Daraus folgt: 1. Da keine Producte verschiedener a_n und da_n/dt in P und K vorkommen, dass die Schwingungen, die den einzelnen

1) Eötvös, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*. 3. p. 55. Wied. Ann. 27. p. 448. 1886.

Kugelfunctionen entsprechen, unabhängig voneinander geschehen; ähnlich also den Partialschwingungen einer Saite nach einzelnen trigonometrischen Functionen; 2. nachdem $a_n = \cos(2\pi(t/T) + \epsilon)$ gesetzt ist, aus dem Princip der Erhaltung der Energie

$$\frac{dP}{dt} + \frac{dK}{dt} = 0,$$

die Periode der Schwingungen nach n -ten Kugelfunctionen:

$$(1) \quad T_n = \sqrt{\frac{3\pi}{n(n-1)(n+2)} \cdot \frac{P}{g \cdot \alpha}};$$

P ist das Tropfengewicht, g die Beschleunigung.

$n = 1$ gibt keine Bewegung; $r = a_0 + a_1 P_1(\cos \Theta) = a_0 + a_1 \cos \Theta$ bestimmt eine Kugel.

$n = 2$ liefert die langsamsten Schwingungen, sie sind ellipsoidisch, denn $r = a_0 + a_2 P_2(\cos \Theta) = a_0 + a_2 (\frac{3}{2} \cos^2 \Theta - \frac{1}{2})$ ist sehr nahe die Gleichung einer Ellipse. Lord Rayleigh hat die Dauer dieser Schwingungen an den Tropfen eines Wasserstrahls in einem Versuch gemessen; dieselbe Zeit aus dem Tropfengewicht und der Oberflächenspannung $\alpha = 8,1 \text{ mg/mm}$ berechnet ergab ihm einen etwas abweichenden Werth; Lord Rayleigh schreibt diese Abweichung der übergrossen Amplitude zu.

$n = 3, 4, \dots$ entsprechen raschere Schwingungen, höhere Partialschwingungen zur ellipsoidischen, die aber unharmonisch sind, denn sie stehen in keinem rationalen Verhältniss der Dauer mit ihr. Die Formen, welche der Tropfen bei $n = 3$ durchläuft, sind durch $r = a_0 + a_3 (\frac{5}{2} \cos^3 \Theta - \frac{3}{2} \cos \Theta)$ gegeben, Fig. 1 stellt sie aus der einen Hälfte der Schwingung dar, eine halbe Schwingungsdauer später, nachdem die Gleichgewichtskugel durchlaufen, ist nur Oben und Unten vertauscht, also die Zeichnung verkehrt zu betrachten.

3. Die Objecte meiner Beobachtungen bilden nicht Tropfen eines Strahls, sondern solche, die von einer verticalen Röhre mit kreisförmiger Mündung einzeln abfallen. Dieselben erfordern weniger Flüssigkeit, schwingen in weit kleineren Amplituden als jene, und es lässt sich auch ihr Gewicht mit Leichtigkeit genau bestimmen.

Es ist nöthig, dass wir zuerst untersuchen, welchen Anstoss zu Schwingungen die Tropfen beim Abfall erhalten, und welche der Partialschwingungen dadurch zu Stande kommen; ich beschreibe in diesem Abschnitt die zur Beantwortung dieser Fragen angewandten Apparate.

Das beste Mittel zur Beobachtung ist der electrische Funke; vom hellen Hintergrund eines zwischen Funken und Tropfen gestellten durchscheinenden Schirms heben sich die schwarzen Contouren der Tropfen aufs schärfste ab. Stellt man den Interruptor einer Inductionsrolle so ein, dass er soviel Stromunterbrechungen in der Zeiteinheit gibt, als Tropfen abfallen, oder etwas mehr oder weniger, so beleuchten die Funken immer dieselbe, oder kurz vorübergehende oder einander nachfolgende Phasen der Erscheinung, sodass das Auge den Eindruck hat, als ob der Tropfen vor dem Schirm schwebend bliebe oder sich langsam aufwärts oder abwärts bewegte, und man die Veränderungen seiner Form leicht verfolgen kann. Ein merkwürdiger Anblick ist es, zu sehen, wie der Tropfen, sich aufwärts bewegend, alle Formen langsam rückwärts durchläuft, wie sich ihm von der Röhre der Flüssigkeitsfaden entgegenstreckt, ihn wieder aufnimmt, und er an der Röhre hängen bleibt. Das Auge erträgt bei solchem continuirlichen Verlauf der Erscheinung leicht weit grössere Zeitintervalle von einem Funken oder Tropfen bis zum nächsten als die Dauer eines Lichtdruckes währt, $\frac{1}{8}$ Secunde, ohne den dunklen Zwischenraum zu verspüren, wenn die Aufmerksamkeit nicht besonders auf ihn gerichtet ist.

In grösserer Tiefe unter der Röhre reicht dieses Beobachtungsmittel nicht mehr aus, da ist die Fallgeschwindigkeit schon so gross, dass die kleinste Unregelmässigkeit im Unterbrecher, verursacht durch das frühere oder spätere Abreissen des Quecksilberfadens, den selbst ein Platinstift immer nach sich zieht¹⁾, schon ein bedeutendes scheinbares Hüpfen des Tropfens verursacht, was die Wahrnehmung der Formen sehr erschwert und das Auge angreift. Deswegen habe ich noch eine andere Einrichtung angewandt, die Tropfen zu be-

1) Merkwürdiger Weise zieht der Platinstift nur dann das Quecksilber nach sich, wenn Strom durchgeht.

leuchten, welche auch zugleich beweisen wird, dass die eben erwähnte Unregelmässigkeit nicht an dem Abfall der Tropfen selber, der mit grosser Regelmässigkeit bei einem Tropfen genau wie beim nächsten vor sich geht, sondern nur vom Quecksilberunterbrecher herrührt. Es wurde nämlich durch die fallenden Tropfen selbst der primäre Strom des Inductoriums unterbrochen und durch den Funken des Inductionsstromes der nächste, höhere, nachfolgende Tropfen beleuchtet. Der kleine Apparat, der hierzu in den primären Stromkreis eingeschaltet wurde, bestand aus einem ca. 20 cm langen federnden horizontalen Stahlstreifen, am einen Ende befestigt, am anderen Ende eine Korkplatte tragend, auf die die Tropfen auffallen; nahe diesem Ende mit der Korkplatte ist an den Stahlstreifen noch ein aufwärts gerichteter, etwa 1 mm dicker, flach endender Platinstift gelöthet, den er gegen eine amalgamirte Kupferplatte drückt. Stahlstreifen und Kupferplatte sind an der unteren Fläche einer Holzleiste befestigt; durch den Streifen und Stift tritt der Strom ein, durch die Kupferplatte aus. Jeder auffallende Tropfen gibt der Feder einen Stoss nach abwärts, entfernt so auf einen Augenblick den Platinstift von der amalgamirten Platte und lässt damit einen Funken im secundären Stromkreis entstehen.

Durch diese Funken beleuchtet, erscheint jeder Tropfen an der Stelle und in der Form des vorhergehenden, und man hat es so durch Höher- und Tieferstellen des Unterbrechers in der Gewalt, jede beliebige Phase zur Beobachtung festzuhalten.

Gebraucht man die Vorsicht, die Kupferplatte nicht mit zu viel Quecksilber zu bedecken und die Unterbrechungsstelle zur Vermeidung von Erhitzung durch den Extrastromfunken unter Wasser zu bringen, so kann man den Tropfen ganz gut an das Fadenkreuz eines Fernrohres bringen, um durch die Constanz seiner Höhe alle Einflüsse zu untersuchen, welche die Tropfenbildung unregelmässig machen können.

Es zeigt sich, dass bei Anwendung des gleich zu beschreibenden Ausflussrohres, wenn man mit der Tropfengrösse über ein gewisses Maass nicht hinausgeht und Erschütterungen vermeidet, nur kleine Schwankungen der Höhe

stattfinden, während die Formen völlig beständig wiederkehren. Die Empfindlichkeit steigert sich natürlich mit der Tiefe, in der man beobachtet, sodass man mehr als 1 m unter dem Aufflussrohre Schwankungen von mehreren Millimetern kaum vermeiden kann. Zu grosse Tropfen, Wassertropfen von einem Rohr mit sechs und mehr Millimetern Durchmesser, lassen zu heftige Schwingungen beim Abreissen in dem nachströmenden Flüssigkeitstheil zurück, welche dann auf das frühere oder spätere Abreissen des nächsten Tropfens von Einfluss sind. Ueberhaupt hat sich ergeben, dass grosse Tropfen auch aus vielen anderen Gründen zu genauen Messungen ungeeignet sind.

Damit die Tropfen genaue Rotationskörper mit vertical bleibenden Axen werden, ist es nöthig, dass nicht nur die Ausflussöffnung ein horizontaler Kreis sei, sondern auch die Röhre, deren Mündung sie bildet, die Flüssigkeit in genau verticaler Richtung zufließen lasse. Um ein geeignetes Ausflussrohr zu erhalten, zog ich ein Glasrohr, das kreisförmigen Querschnitt und überall gleich dicke Wand hatte, so aus, dass es sehr dünnwandig und von dem verlangten Durchmesser wurde, und schnitt es an der regelmässigsten Stelle entzwei. Der entstandene Querschnitt steht nicht genau genug senkrecht auf der Röhrenaxe und ist überhaupt nicht eben. Um beides zugleich einfacher und sicherer als durch Abschleifen zu erreichen und auch vollständige Benetzung zu sichern, beschnitt ich ein Stück feines ungeleimtes Seidenpapier mit scharfem Messer und Lineal geradlinig und wickelte es um das Röhrenende so in einigen Windungen herum, dass es die Röhre etwas verlängerte, und eine Windung die andere genau deckte; darauf wurde das Papier am oberen Theile festgebunden. Die so erhaltene Röhre, *p*, Fig. 2 auch Fig. 3, braucht nur mit Hülfe eines Bleiloths, indem man dabei hauptsächlich auf ihren unteren Theil achtet, senkrecht gestellt zu werden, damit alle Bedingungen zur verlangten Regelmässigkeit erfüllt sind.

Um die Geschwindigkeit des Zuflusses zu reguliren, lässt man die Flüssigkeit am besten eine enge Röhre passiren, *r* in Fig. 2 und 3, in der man einen Glasfaden von passender

Dicke verschieben kann. Je nachdem man den Zufluss langsamer oder schneller wünscht, verändert man den Reibungswiderstand der Flüssigkeit durch Hinein- oder Herauschieben des Glasfadens. Ein Hahn würde zu plötzlich abschliessen; Kautschuk mit Quetschhahn gibt der elastischen Nachwirkung wegen einen immerfort veränderlichen Zufluss, was sich sehr auffallend bemerkbar macht, wenn man mit der Funkenbeleuchtung durch den Neef'schen Hammer oder einer constant rotirenden stroboskopischen Scheibe beobachtet; nimmt der Zufluss dabei ab, so steigt der beleuchtete Tropfen, im entgegengesetzten Falle sinkt er.

Zwischen diesem engen Theil mit dem Glasfaden und der Mündung war das Rohr noch etwas erweitert, damit die Flüssigkeit von etwaigen Wirbelbewegungen zur Ruhe kommen könne, bevor sie den Tropfen bildet; ich habe aber keinen Unterschied gefunden, wenn ich diese Erweiterung wegliess.

Aus der beigegebenen Zeichnung ist das übrige am Ausflussapparat von selbst verständlich; Fig. 2.

4. Welches die Phasen sind, die die Tropfen durchlaufen, kann ich am besten an der Hand von Abbildungen der merkwürdigsten derselben erläutern, die ich mit dem beschriebenen Ausflussapparat und Stromunterbrecher in der photographischen Camera erhielt, (Fig. 3^b). Es sind etwas vergrösserte Bilder; zur Orientirung diene die Länge 1 cm. Betrachten wir zuerst die Reihe I, in der das Ausflussrohr mit photographirt ist; seine Mündung hat sich in den Bildern (mit Ausnahme eines) nicht markirt, weil der Wasserkörper das Licht durch Brechung ebenso von der Camera abhielt, wie der Papierstutzen durch seine Undurchsichtigkeit, ihre Höhe ist daher durch eine Linie markirt; sie ist in der ganzen Reihe dieselbe. Das erste Bild gibt den Moment der Abtrennung; der recht genau ellipsoidische Tropfen hängt eben noch an einem Wassergebilde, das einer nach abwärts gekehrten Bleistiftspitze nicht unähnlich ist. Eine ähnliche Zeichnung gibt Magnus in seinen hydraulischen Untersuchungen¹⁾; er be-

1) a. a. O., 106.

obachtete nach der unvollkommeneren Methode der stroboskopischen Scheiben. Wie man sieht, würde diese Anfangsform rein ellipsoidische Schwingungen geben, wenn nicht die oberen Theile des Tropfens durch die Zusammenziehung der Oberfläche ähnlich wie beim Zerfall unstabiler Flüssigkeitscylinder, eben aus dem Ligament herausgetrieben, in heftiger Bewegung nach abwärts begriffen wären. Dies hat denselben Erfolg, als ob die Anfangsform bei ruhenden Theilchen eine ganz andere als ein Ellipsoid gewesen wäre, etwa ein solches mit einer Ausbuchtung am oberen Theile. Die Wirkung zeigt sich schon im nächsten Moment (0,001 Sec. später); da ist der Tropfen oben ganz abgeflacht, bei Beobachtung schief von oben scheint er sogar eine Vertiefung zu haben. Das herabhängende Ligament wird durch die Oberflächenspannung zugleich nach oben gezogen und wellenförmig in kleinere Tropfen abgetheilt, die aber in diesem Falle sich noch zu einem zusammenziehen, der seine Wurfbewegung nach aufwärts (bis Bild 8), dann nach abwärts fortsetzt; er kann sogar mit dem nachströmenden Wassertheil zusammenstossen, was hier nicht geschieht, aber bei Flüssigkeitsstrahlen die Regel und, wie Lord Rayleigh gezeigt hat, die Ursache ihres Zersprühens ist. Der grosse Tropfen flacht sich von oben immer mehr ab, während der untere Theil in den vier oder fünf ersten Bildern fast ganz unverändert bleibt; es durchläuft der ringförmige Wasserberg, der die Ränder der ersten Abplattung bildet, von oben nach unten den ganzen Tropfen, bis er unten zusammenschlägt, und zugleich das Ganze wieder ein langgestrecktes Ellipsoid wird. Natürlich ist dies keine durch die Erdanziehung, sondern durch die Oberflächenspannung bewegte Welle, wie die feinen Kräuselungen von Wasserflächen. Inzwischen erscheinen am unteren Theil noch merkwürdige Ausbuchtungen (Bild 6 und 7), aber trotz dieser complicirten Formen erkennt man im ganzen die ellipsoidische als Hauptschwingung, überdeckt von einer grossen Anzahl von Partialschwingungen.

Es ist bemerkenswerth und für die späteren Messungen wichtig, dass sich fast ganz genau dieselben Formen bis ins

einzelnte bei den Tropfen jeder Grösse aller Flüssigkeiten, die ich untersuchte, wiederholen, und dass also alles, was durch die Form der Tropfen bedingt ist und in einem Falle gefunden wurde, für alle Fälle gilt. Nur ein Unterschied besteht, im Ligament nämlich, dessen Länge und damit auch die Grösse und Anzahl der secundären Tröpfchen mit der Tropfengrösse und der inneren Reibung der Flüssigkeit zunimmt. Bei Leinöl wird der Faden, bei derselben Ausflussröhre wie die der Bilder, bis 8 cm lang, bevor die Abtrennung stattfindet, er zerfällt in eine grosse Anzahl von Tröpfchen, die dem Haupttropfen in einem Schwarme nachfolgen. Auch die Tropfen, in welche Wasserstrahlen zerfallen, haben jene merkwürdigen und complicirten Formen, sogar in höherem Grade, wie ich dies nach der Methode Lord Rayleigh's mit der electrisch unterbrechenden Stimmgabel beobachtete.

In II sind Tropfen aus einer Tiefe von 16 bis 21 cm unter der Mündung des Rohres zusammengestellt, in III 67 bis 85 cm tiefe, und zwar nicht wie die in I dem Raume nach, sondern der Zeit nach geordnet. Der verticale Abstand zweier Tropfen misst also die Zeit zwischen ihnen, wobei zu II zu bemerken ist, dass die Tropfen nur deswegen in zwei Reihen auseinander gerückt wurden, damit sich nicht einzelne deckten. Auf den ersten Blick erkennt man an diesen Formen neben der ellipsoidischen Schwingung die Partialschwingung der dritten Kugelfunction, alle die übrigen schnelleren Partialschwingungen sind durch die innere Reibung schon verschwunden, und auch die Amplitude der einen, übrig gebliebenen, langsamsten Oberschwingung nimmt von II bis zu III ersichtlich ab, und es bleibt hier die ellipsoidische Schwingung fast rein zurück.

Die beiden Scalen rechts und links von den Tropfen, welche die einzelnen Viertel der ellipsoidischen und der höheren Partialschwingung angeben, sind mit Hülfe eines verticalen Centimetermaassstabes, der mit den Tropfen zugleich photographirt (aber nicht mit copirt) wurde, erhalten. Es konnte aus jeder Platte die Höhe des Schwerpunktes des Tropfens entnommen und aus den Höhen mittelst später noch zu gebender Formeln die Zeiten berechnet werden. Die

Höhen derjenigen drei Kugeln, deren Orte sich am genauesten feststellen liessen, und aus denen die Dauer der ellipsoidischen Schwingung abgeleitet werden kann, waren:

				Höhe cm
Kugel nach $\frac{1}{4}$ Schwingung				0,35
" " 4,5 "	{	vorhergehendes Ellipsoid		19,33
" " " "		nachfolgendes "		19,75
" " 10 "		Kugel interpolirt		19,52
Dauer der ellipsoidischen Schwingung 0,03751 Sec.				79,56

Wie man sieht, sind die ellipsoidischen Schwingungen von dem ersten flachsten Ellipsoid an gezählt, und es liegt die lange Ellipsoidform, von der man ausgehen müsste, um die wirklich eintretenden ellipsoidischen Schwingungen zu erhalten, noch oberhalb des sich eben abtrennenden Ellipsoides, welches zugleich eine Gleichgewichtsform für die Partialschwingung ist, und daraus folgt eben, dass die Theile dieses Ellipsoides in solcher Bewegung sind, als ob sie schon etwa $\frac{1}{3}$ ellipsoidische und $\frac{1}{4}$ Partialschwingung gemacht hätten (abgesehen von den höheren Partialschwingungen).

Die Dauer der Partialschwingung fand ich, indem ich die einmal nach den Zeiten geordneten Tropfen II und III in eine Reihe in gehöriger Entfernung untereinander stellte und dann auf einem Papierstreifen eine Längeneintheilung so aufzutragen suchte, dass sie, an die Tropfenreihe angelegt, ein überall möglichst genaues Zusammentreffen der Theilstriche mit den einzelnen Viertelpartialschwingungen ergab. Die erhaltene Scala ist auch die in den Copien enthaltene: die Uebertragung derselben nach I hinauf geschah durch Rechnung. Das Verhältniss der Schwingungsdauern nach zweiter und dritter Kugelfunction findet sich nun als Längenverhältniss der beiden Scaleneinheiten zu 1,918, während die Theorie:

$$\frac{\sqrt{3(3-1)(3+2)}}{\sqrt{2(2-1)(2+2)}} = 1,9365 \dots$$

gibt; die Uebereinstimmung ist befriedigend. Die Dauer der Partialschwingungen selber ist demnach 0,01956 Sec.

Ueber die Herstellung der Photographien ist kurz Fol-

gendes zu sagen: Der Ausflussapparat war nahe der Decke des Raumes aufgestellt, der Unterbrechungsapparat konnte in beliebige Höhe gestellt werden, je nach der Tropfenform, auf die es ankam. In der Richtung des Lichtstrahls befanden sich nacheinander: Der Funkenentlader, dicht dahinter zwei Convexlinsen, um das Licht zu sammeln, dann der beleuchtete Tropfen, neben ihm der Maassstab, endlich die Camera. Die beiden Linsen zusammen mit dem Objectiv des Apparates entwarfen auf die photographische Platte, die auf Tropfen und Maassstab eingestellt ist, einen Zerstreuungskreis des Funkens, der als heller Hintergrund dient. Ein Funke des grossen Ruhmkorff-Inductors des Heidelberger physikalischen Instituts (er enthält etwa 30 km secundären Draht und war verbunden mit 3 Bunsen'schen Elementen und einer Leydener Flasche von etwa 23 dm² äusserer Belegung) genügte bei den empfindlichen Trockenplatten zu einer Aufnahme.

5. Ich komme nun dazu, anzugeben, wie die Versuche zur Messung der Schwingungsdauern und Tropfengewichte angestellt wurden.

Die Schwingungsdauer wurde als Fallraum gemessen. Da jedoch die Amplitude der Schwingungen hier nur klein ist, musste ich darauf verzichten, die Höhenunterschiede von Knoten oder Bäuchen unmittelbar zu messen. Auch stroboskopische oder Funkenbeobachtung gibt keine genaueren Resultate und ist zeitraubender, als die Anwendung der bekannten Lichtflecke, die man an den Dachtropfen oder den Tropfen der Sträucher, wenn es regnet, bemerkt.

Der Weg eines Lichtstrahls von aussen durch eine Kugel hindurch ist, wie leicht einzusehen, symmetrisch zu einer Ebene, die man senkrecht auf seinen in der Kugel befindlichen Theil durch den Kugelmittelpunkt legt. Daraus folgt, dass ein von aussen in eine Kugel gekommener Lichtstrahl nie eine totale Reflexion erleiden kann, denn sollte er das, so müsste der Winkel, unter dem er austritt $\leq 90^\circ$ werden; der Symmetrie wegen aber würde es dann auch der Einfallswinkel beim Eintritt in die Kugel, das heisst, der Strahl könnte nicht von aussen in die Kugel gekommen sein. Jede

Abweichung des lichtbrechenden Körpers von der Symmetrie zu jener Ebene gibt die Möglichkeit einer totalen Reflexion; lassen wir die Kugel in ein Ellipsoid sich verwandeln, dann werden Strahlen so eintreten können, dass sie an der hinteren Fläche total reflectirt werden.

Man kann dies leicht auch durch einen Versuch zeigen. An dünne Glasröhren blies ich vor der Lampe eine Kugel, ein langaxiges und ein kurzaxiges Rotationsellipsoid von einigen Centimetern Durchmesser und füllte alle drei mit Anisöl, dessen Brechungsquotient dem des Glases nahe kommt, sodass nur die äussere Begrenzung des ganzen Körpers gegen Luft in Betracht kommt. Man bemerkt an allen diesen drei Körpern folgende Bilder eines leuchtenden Objectes, z. B. einer Kerzenflamme in dunklem Zimmer in etwa 1 dm Entfernung:

1. Vom durchgehenden, zweimal gebrochenen Licht ein verkleinertes, verkehrtes, reelles Bild; wie das einer Convexlinse.
2. Ein an der ersten Fläche reflectirtes, verkleinertes, aufrechtes, virtuelles Bild; wie das eines Convexspiegels.
3. An der Rückseite reflectirt ein verkleinertes, verkehrtes Bild; es ist auch reell, liegt aber nahe der Hinterwand des Körpers und hat natürlich farbige Ränder. Es gibt eine Stelle des Glaskörpers, die, mit feuchtem Finger berührt, das Bild verblassen macht zum Beweis, dass es einmal reflectirt ist.
4. Ein zweimal reflectirtes, schwaches, aufrechtes Bild; es ist schwer zu sehen und interessirt uns weiter nicht.

Von Interesse für unseren jetzigen Zweck ist das Bild 3. Am Fenster eines hellen Zimmers ist die Hinterseite des flachen Ellipsoids ganz bedeckt von diesem Bild. Wenn man nun in geeigneter Richtung beobachtet, bemerkt man, dass ein sichelförmiger Theil des Bildes eine bedeutende Helligkeit hat. Aus dem grösseren, dunkleren Theil in den glänzenden setzen sich ungestört alle Linien des Bildes in ihrer verzerrten Weise fort. Dieser glänzende Theil ist total reflectirt; er ist auch in dem langaxigen Ellipsoide sichtbar, jedoch bei anderer Beobachtungsrichtung, in der Kugel niemals. Dass die Reflexion im glänzenden Stück total ist,

beweist man leicht durch folgenden Versuch. Man hält das Ellipsoid so, dass der fragliche Theil des Bildes sich unten befindet, und nähert dann von unten her ein Schälchen mit Wasser oder Alkohol oder irgend einem dichteren Medium als Luft. Im Momente des Eintauchens verschwindet aller Unterschied zwischen dem hellen und dunkleren Teile des Bildes, beide werden gleich hell, dunkler aber als zuvor, ohne dass natürlich an den Linien des Bildes etwas sich änderte.

Unter genau denselben Umständen, unter denen das flache Glasellipsoid total reflectirte Bilder gibt, beobachtet man in den Höhen, in welchen sich in einer Reihe von herabfallenden Tropfen flache Ellipsoidformen befinden, sehr helle, vertical langgestreckte Lichtflecke von den Formen, wie sie Fig. 4, darstellt und zwar *A* die obersten drei oder vier, *B* die folgenden zwei oder drei und *C* alle tieferen. Hält man das flache Glasellipsoid mit verticaler Axe neben einen hellen Lichtfleck der Tropfen und beobachtet nach verschiedenen Richtungen, so verschwindet und erscheint er zugleich mit dem totalen Reflex im Glasellipsoid.

Hieraus ist klar, dass die hellen Lichtflecke der Tropfen aneinander gereihete, umgekehrte, in einem Theil total reflectirte Bilder des Stückes Himmels gewölbe, dass das Fenster abgrenzt, sind, entworfen von den flachen Ellipsoiden und begrenzt nach oben und unten durch die Kugelformen der Tropfen, und dass also ihr Ort wesentlich zusammenhängt mit den ellipsoidischen Schwingungen und zu deren Verfolgung dienen kann.

Rein ellipsoidisch schwingen nun die frei abfallenden Tropfen nicht, und es ist kein Zweifel, dass auch die Partialschwingungen in dritten Kugelfunctionen auf die totalen Reflexe Einfluss haben werden. Das Aussehen der Reflexe *B* lässt dies erkennen; ihre Unterbrechung in zwei Theile kommt daher, dass sich über das flachste Ellipsoid das den hellsten Punkt geben würde (ich habe immer nur die Reflexe der flachen Ellipsoide benutzt), in der vierten, fünften, sechsten Schwingung gerade die grösste Amplitude der Partialschwingung lagert, wie die photographischen Aufnahmen ersichtlich machen, und die untere Hälfte des Tropfens, an der eben

die totale Reflexion stattfinden sollte, dergestalt verändert, dass hier die Helligkeit nach dem flachsten Ellipsoid hin gerade ab-, statt zunimmt: der dunkle Zwischenraum fällt nahe dem flachsten Ellipsoid. Dieser Einfluss der Partialschwingungen wäre für die Messungen sehr störend.

Es gelingt aber, die ellipsoidischen Schwingungen beinahe vollständig rein und daher die totalen Reflexe alle in der zur Messung geeigneten Form *C* zu erhalten, wenn man in die Axe der Ausflussröhre ein dünnes, nach unten sehr spitz zulaufendes Holzstäbchen einsetzt, siehe Fig. 3 *h*, an dem die Tropfen, nachdem sie gebildet, heruntergleiten müssen. Die Bewegung der Flüssigkeit aus dem Ligament hinaus nach abwärts, welche ja die einzige Ursache der Partialschwingung ist, wird durch die Reibung am Stäbchen fast ganz aufgehoben, und die Funkenbeobachtung zeigt, dass der Tropfen, sobald er das Stäbchen verlassen hat, gleich beinahe rein ellipsoidisch schwingt, nur die Reflexe 3, 4 und 5 fallen etwas unterhalb der flachsten Ellipsoide, wenn die Tropfen nicht sehr klein sind. Es ist aber nöthig, dass das Stäbchen sehr spitz ende, geradlinig sei und genau in der Rohraxe stehe.

Sehr geeignet hierzu sind im Apparat Fig. 3, Grannen von reifer Gerste (die ich nacheinander in Aether, Alkohol, Wasser gewaschen habe); *r* und *ff* sind in Fig. 3 wie 4 das enge Rohr und der Glasfaden zur Regelung des Zuflusses, ebenso ist *p* der Papierstutzen, in den das Rohr endet. *g* ist ein dünnes Glasröhrchen, welches unten innerhalb *p* endigt, und in das die Granne *h h* mit gelinder Reibung eingeschoben ist. Dieses Röhrchen *g* wird durch ein im Mittelpunkt durchbohrtes gleichseitiges Dreieck von Platin, *Pt*, und einen Tropfen Schwefel, *S*, der den oberen Ansatz der Röhre ausfüllt, festgehalten. Während der Schwefel angetropt wird, ist die Granne und der Papierstutzen noch nicht vorhanden, und das Röhrchen *g* durch ein centrisch gebohrtes Stück Messing (Uhrmacherfutter), welches den Zwischenraum zwischen ihm und dem äusseren Rohr bei *p* ausfüllt, fixirt. Das Messingfutter wird nach dem Erstarren des Schwefels herausgezogen.¹⁾

1) Dieser Apparat wurde nur zu den in Tab. IV und VI enthaltenen

Das Stäbchen hatte auch noch den Nutzen, dass es gestattet, die Amplitude auch der ellipsoidischen Schwingungen abzuändern, indem man es verschieden weit aus der Röhre vorstehen liess, um den Einfluss dieser Abänderung auf die Schwingungsdauer zu untersuchen.

Es wurden aber auch Messungen ohne dieses Stäbchen gemacht und dazu mit den tiefen Reflexen der Form *C* auch der alleroberste benutzt, den ich der Symmetrie halber immer als 0. bezeichnen werde, und dessen hellster und breitester Punkt mit der flachsten Form des Tropfens zusammenfällt; dieser Reflex ist auch so klein, die Fallbewegung hier noch so langsam, dass ein kleiner Irrthum in der Phase nur einen sehr kleinen Fehler der abgelesenen Höhe bewirken würde. Dabei habe ich in Anbetracht dessen, dass die Tropfen nur im ganzen grossen Ellipsoide sind, dafür Sorge getragen, dass möglichst viele Punkte der Oberfläche zum reflectirten Bilde beitragen, dass also die Tropfen ein möglichst grosses Bild des Fensters geben (denn es wird der starken sphärischen Aberration wegen jeder Punkt des Bildes von anderen Oberflächenelementen entworfen, wie Beobachtung am Glasellipsoid lehrt), d. h. ich habe den Apparat nahe dem Fenster aufgestellt. Die Beleuchtung kommt dann schief von oben; und um die Reflexe recht ausgeprägt zu sehen, muss man sie auch schief von oben betrachten, und zwar so, dass, wenn man die Tropfen vor sich hat, das Fenster zur Rechten oder Linken sich befindet.

Abgelesen wurde immer die Höhe des hellsten Punktes, oder, was bei den Reflexen *C* dasselbe ist, der Mitte, an einem in Millimeter getheilten Spiegelglasstreifen *mm* (Fig. 2), der in 1 bis 2 cm Entfernung vor dem Weg der Tropfen vertical aufgestellt war. Ein Streifen schwarzer Tapete hinter dem Tropfen gab einen passenden Hintergrund; in der Figur ist er weggelassen. Der kleine halbbelegte Spiegel *s* war vor dem Glasmaassstab auf und ab schiebbar so, dass seine in passende Neigung zum Horizont gestellte Ebene dabei sich

Versuchen benutzt, die übrigen sind mit einem ähnlichen ausgeführt, der aber statt der Granne ein Holzstäbchen und statt des Schwefels eine Kautschukdichtung enthielt.

selbst parallel blieb. Er diente dazu, die Visirrichtung zur Vermeidung einer Parallaxe zu fixiren, indem man den Lichtstreifen, dessen Höhe abgelesen werden sollte, durch das Spiegelbild der Pupille im kleinen Spiegel halbiren liess; der Theilstrich des Maassstabes, der dann durch den Mittelpunkt des Pupillenbildes ging, war der gesuchte. Obwohl jede Lichterscheinung nur einen Augenblick dauert, ist diese Einstellung durch die regelmässige Wiederkehr des Lichtes gut möglich.

Was endlich das Wägen der Tropfen betrifft, so wurde es in weithalsigen Wägegläschen ausgeführt, wie man sie in der chemischen Analyse anwendet, in welchen die Tropfen, gewöhnlich 100, aufgefangen waren. Um Spritzverlust zu vermeiden, war in jedes Wägegläschen ein Glimmerblatt schief hineingestellt, auf das die Tropfen zunächst fielen.

Die Constanz des Tropfengewichtes kann aus Folgendem beurtheilt werden:

Tropfengewicht aus 50 Tropfen	0,05224 g
unmittelbar nachher nochmals bestimmt	0,05226 "
30 Min. später, als das Niveau um 18 mm gesunken war	0,05198 "
als das frühere Niveau durch Nachgiessen hergestellt war	0,05228 "

Es wurde daher das Tropfengewicht bei den meisten Versuchen nur einmal bestimmt. Die Gewichte der secundären Tröpfchen, welche auch mit gewogen wurden, betrugen bei den angewandten Röhrendurchmessern kaum Zehntelmilligramme, es konnte also von ihnen ganz abgesehen werden.

Bevor ich zu den Resultaten selbst komme, muss ich noch eine Untersuchung über den Luftwiderstand einfügen, welche nicht nur der Fallgesetze halber, sondern auch wegen einer denkbaren Einwirkung der Luft auf die bewegten Tropfen selber für unseren Gegenstand wichtig ist.

6. Newton fand die negative Beschleunigung, die ein gasförmig oder tropfbar flüssiges Medium auf eine bewegte starre Kugel ausübt¹⁾:

1) Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Liber II. Sectio 2 u. 7; auch Gehler's Wörterb. d. Phys., Art. Widerstand, p. 1735 u. 1743.

$$f = \frac{2}{3} \frac{\rho \cdot v^2}{D \cdot r},$$

wenn v die Geschwindigkeit, r der Radius, D die Dichte der Kugel, ρ die des widerstehenden Mediums ist. Sonach ist die Differentialgleichung der verticalen Fallbewegung einer festen Kugel durch ein solches Medium:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{g}{K^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

wo $g/K^2 = \frac{2}{3}(\rho/Dr)$, und ihre Integration liefert, wie bekannt:

$$x = \frac{K^2}{g} \log \left(c_1 e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}} \right) + c_2.$$

c_1 und c_2 sind Constanten der Integration.

Es kam darauf an, zu untersuchen, ob dies auch die Fallgesetze eines Flüssigkeitstropfens durch Luft sind, und besonders, ob durch mehr oder minder rasches Aufeinanderfolgen von Tropfen der Luftwiderstand nicht etwa durch Strömungen beeinflusst wird.

Dieses habe ich in folgender Weise bewerkstelligt. Der schon mehrfach gebrauchte Stromunterbrecher wurde etwa 3 m unter dem Ausflussapparat aufgestellt; er beleuchtet, wenn die Tropfen rasch genug nacheinander auf ihn fallen, jeden einzelnen Tropfen an mehreren Punkten seiner Bahn, und zwar, wie schon bekannt, alle an denselben Punkten. Wenn man also im dunklen Raume mit dem Funkenentlader und einem matten Schirm in der Hand vom Unterbrecher bis zum Ausflussrohr aufsteigt, findet man eine Reihe scheinbar schwebender Tropfen, deren Höhen man an einem verticalen, in Centimeter getheilten Maassstab ablesen kann. Schwankten dabei auch in den grösseren Tiefen die beleuchteten Tropfen ziemlich auf und ab, so konnte man doch nach einer kleinen Weile ihren mittleren Ort ausfindig machen. Zugleich wurde mit Hülfe eines Secundenchronoskops die Zeit gemessen, während welcher eine gezählte Anzahl Funken erschien; diese Zeit, dividirt durch die Anzahl, gibt die Zeit von einem Funken bis zum nächsten, also die Zeitintervalle T , in denen die notirten Höhenintervalle x durchfallen sind. Um diese Zeitintervalle beständig

gleich zu erhalten, hatte bei diesen Versuchen der Ausflussapparat eine Mariotte'sche Flasche. Endlich wurde noch das Gewicht der Tropfen bestimmt, um den Radius r der Kugel zu kennen, die ihre mittlere Form ist.

Ist dieses alles gefunden, so kann man $g/K^2 = \gamma \cdot (\rho/Dr)$ setzen und γ berechnen, um zu erkennen, ob es constant, und wie gross es ist, wie das Folgende zeigt:

Bezeichnen x_1, x_2, x_3 die Höhen dreier aufeinander folgender beleuchteter Tropfen von einem beliebigen Anfangspunkte aus gemessen, T das gemessene Zeitintervall, so ist, wenn man die Zeit von dem Moment aus zählt, in welchem der Tropfen x_1 passiert:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{K^2}{g} \log (c_1 + 1) + c_2, \\x_2 &= \frac{K^2}{g} \log (c_1 e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}) + c_2, \\x_3 &= \frac{K^2}{g} \log (c_1 e^{\frac{2gT}{K}} + e^{-\frac{2gT}{K}}) + c_2, \\x_2 - x_1 &= \Delta_1 = \frac{K^2}{g} \log \frac{c_1 e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}}{c_1 + 1}, \\x_3 - x_2 &= \Delta_2 = \frac{K^2}{g} \log \frac{c_1 e^{\frac{2gT}{K}} + e^{-\frac{2gT}{K}}}{c_1 e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}}.\end{aligned}$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen, in denen Δ_1 und Δ_2 abkürzende Bezeichnungen für die Wege sind, ist:

$$c_1 = \frac{e^{-\frac{gT}{K}} - e^{\frac{J_1 g}{K^2}}}{e^{\frac{J_1 g}{K^2}} - e^{\frac{gT}{K}}}.$$

Substituirt man dies in die zweite, ersetzt auch in dieser den Logarithmus durch die Exponentialfunction und schafft die Nenner weg, so erhält man eine Gleichung, die, durch $e^{\frac{J_1 g}{K^2}} (e^{\frac{gT}{K}} - e^{-\frac{gT}{K}})$ dividirt, ist:

$$(2) \quad 0 = e^{\frac{J_1 g}{K^2}} + e^{-\frac{J_1 g}{K^2}} - (e^{\frac{gT}{K}} + e^{-\frac{gT}{K}}).$$

In dieser Gleichung ist nichts mehr unbekannt als K , welches das gesuchte γ enthält. Um sie mit beliebiger Annäherung auflösen zu können, entwickelt man die Exponentialfunctionen in die Taylor'schen Reihen:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Man übersieht sogleich, dass aus den zwei Reihen der Klammer die Glieder mit ungeraden Potenzen von K wegfallen, und dass die zwei anderen Reihen überhaupt nur gerade K -Potenzen enthalten, dass also das Resultat auch nur gerade Potenzen enthalten wird; es lautet, mit g/K^2 dividirt:

$$0 = \sum_1^{\infty} \frac{g^n}{K^{2n}} \left(\frac{A_2^n + (-A_1)^n}{n!} - 2 \frac{g^n T^{2n}}{(2n)!} \right).$$

Die Reihe ist convergent, da sie die Summe von vier convergenten Reihen ist. Für die Werthe, die die vorkommenden Grössen bei den Versuchen haben, ist das vierte Glied dieser Reihe schon so klein, dass es bei der Berechnung der meisten Versuche ganz wegbleiben konnte. Wurde dem von K freien Gliede als kleine Correction m beigelegt, so blieb also zur Bestimmung von γ die Gleichung:

$$(3) \quad \left\{ \left(\gamma \frac{g}{Dr} \right)^2 \left(\frac{A_2^3 - A_1^3}{6} - \frac{g^3 T^3}{360} \right) + \gamma \frac{g}{Dr} \left(\frac{A_2^3 + A_1^3}{2} - \frac{g^3 T^4}{12} \right) \right. \\ \left. = g T^2 - (A_2 - A_1) - m, \right.$$

worin $Dr = \sqrt[3]{(3/4\pi)pD^2}$ ist, wenn p das Tropfengewicht ist, g , welches in der Breite und Meereshöhe von Heidelberg 9,8093 m/sec² beträgt, ist noch um den Luftauftrieb zu vermindern.

Die erhaltenen Werthe von γ , sowie die Versuchsdaten selbst, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

Vers.- Nr.	p g	T sec	x cm	ber. aus	γ
Wassertropfen.					
1	0,063 815	0,1531	1 17,12	1, 3, 5	0,1507
			2 33,65		
			3 72,78		
			4 132,78	2, 3, 4	0,169
			5 212,18		
u. 304,85	3, 4, 5	0,147			
2	0,045 223	0,1895	1 17,16	1, 2, 3	0,128
			2 43,59		
			3 103,76		
			4 193,75	2, 3, 4	0,167
			u. 305,15		
3	0,059 740	0,2490	1 17,40	1, 2, 3	0,120
			2 59,42		
			3 158,78		
4	0,029 15	0,3787	1 21,7	1, 2, u.	0,153
			2 107,6		
			u. 305,4		
5	0,030 27	0,381	1 21,00	1, 2, u.	0,148
			2 105,77		
			u. 305,10		
6	0,107 99	0,1775	1 26,40	2, 3, 4	0,169
			2 57,03		
			3 115,38		
			4 200,90	1, 3, u.	0,112
			u. 305,12		
Alkoholtropfen.					
7	0,019 27	0,20163	1 17,01	2, 3, 4	0,1891
			2 42,99		
			3 103,43		
			4 194,18	1, 3, u.	0,184
			u. 305,32		
Quecksilbertropfen.					
8	0,088 72	0,20750	2 29,57	2, 3, 4	0,324
			3 89,75		
			4 191,28		

Es war durch Vorversuche festgestellt, dass die Messlatte, die in weniger als 2 cm Entfernung neben den Tropfen aufgestellt war, den Luftwiderstand nicht modificirte.

Die Zahlen T und x sind fast sämmtlich Mittelwerthe; zum Beleg hierfür, sowie für die Art der Beobachtungen

gebe ich die Zahlen von Versuch 1 in der folgenden Tabelle vollständig.

Tabelle II.

Versuch 1. Höhen der oberen Tropfenränder.

x	abgel. vor der Best. von T			nach der Best. von T			Mittel
1	17,3	17,1	17,1	17,1	17,0	17,1	17,12 cm
2	34,5	33,7	33,5	33,5	33,3	33,4	33,65 "
3	73,9	73,4	72,3	72,3	72,2	72,6	72,78 "
4	133,6	133,2	132,7	132,6	132,4	132,2	132,78 "
5	212,5	212,6	211,9	212,3	212,0	211,8	212,18 "
u.	304,85						304,85 "

Zeitbestimmung: 400 Tropfen fielen in 1 Min. 1,4 Sec., 1 Min. 0,8 Sec.
1 Min. 1,5 Sec.; Mittel 400 T = 1 Min. 1,23 Sec.

Tropfengewicht: 200 Tropfen mit Wägegl. 26,384 g
leeres Wägegl. 13,721 "
 $200p = 12,663$ g

x bezeichnet die Höhe der Fläche der Korkplatte am Unterbrecher, wo sich zur Zeit eines Funkens auch ein Tropfen befindet, welche daher auch mit zur Berechnung von γ verwendet werden kann; jedoch nicht ohne Correction, wovon man sich überzeugt, wenn man das Licht des Funkens auf den Unterbrecher selbst fallen lässt, wobei man den eben aufgefallenen Tropfen schon in einen Kreis kleiner Tröpfchen zerstoßen sieht: es war also Zeit vergangen zwischen dem Auf- fallen des Tropfens und dem Erscheinen des Funkens. Es ergibt sich aus dem Vers. 1, wenn man mit dem Mittelwerthe 0,1560 der drei schon erhaltenen γ , den zu $x_4 - x_2 = \Delta_1$ gehörigen Weg Δ_2 aus Gleichung 2) berechnet, dass während des Zeitverlustes im Unterbrecher der Tropfen noch um 2,7 cm weiter hätte fallen können. Diese 2,7 cm wurden bei Vers. 6, dessen Tropfen mit denen des Vers. 1 ungefähr die gleiche Masse haben, bei der Berechnung zu dem angegebenen x_u hinzuaddirt, ebenso bei den leichteren Tropfen von Versuch 4, 5 und 7 5,1 cm, abgeleitet aus Versuch 2.

Man sieht aus den gefundenen Werthen von γ :

1. dass $f = \text{const. } \rho v^2 / Dr$ die Abhängigkeit des Luftwiderstandes vom Radius r der Tropfen innerhalb der untersuchten Grenzen richtig darstellt, denn vergleicht man die

aus Versuch 1, 2 und 6, in denen T nahe dasselbe, p jedoch sehr verschieden war, erhaltenen γ , so findet man Uebereinstimmung, soweit die Genauigkeit der Versuche geht.

2. Die Zeit T , nach welcher die Tropfen einander folgen, ändert den Luftwiderstand nicht, wie man durch Vergleichen der in dieser Beziehung extremen Versuche 4, 5 und 1, 6 findet.

3. Der Luftwiderstand der Tropfen, dessen Constante im Mittel aus den mit Wasser und Alkohol (spec. Gewicht 0,8105) erhaltenen Werthen $= 0,153$ ist, ist geringer als der fester Kugeln: er ist von Newton aus Fallversuchen in Luft und Wasser zu $\frac{3}{8} = 0,375$, von Borda¹⁾ auf ähnliche Weise zu $\frac{9}{40} = 0,225$, von Hutton²⁾ an abgeschossenen Kugeln (von 1 Zoll Durchmesser) zu $\frac{1}{6} = 0,188$ gefunden. Nur Quecksilber ergab einen grösseren Werth der Constanten γ .

Die Ursache des kleinen Widerstandes gegen die Tropfen kann an der Nachgiebigkeit der Flüssigkeit gegen den Druck der strömenden Luft, also an kleinen Deformationen der Tropfen liegen gerade dort, wo der Luftwiderstand am stärksten angreift.

Obgleich die photographischen Aufnahmen sowie die Beobachtung der Tropfen bis zu 3 m Tiefe nichts hiervon zu erkennen geben, zeigte sich in der That bei Regentropfen, die ich bei Gelegenheit eines ausgiebigen nächtlichen Niederschlages durch den electrischen Funken auf einen matten Schirm projecirte, dass sie zumeist flach mit einer Zuspitzung nach unten waren, ähnlich dem Tropfen der nach der siebenten Partialschwingung abgebildet ist, während kein einziger gefunden werden konnte, der eine Spitze nach oben gehabt hätte, wie dies hätte der Fall sein müssen, wenn von Partialschwingungen die Rede sein könnte; vielmehr stimmen die Formen der Regentropfen ganz mit denen überein die J. J. Thomson³⁾ von Tropfen beschreibt, die in Flüssigkeiten gefallen sind, und sich in Wirbelringe zu verwandeln beginnen. Es ist also kein Zweifel darüber, dass die Luft

1) Borda, s. Gehler's Wörterb. d. Phys., Art. Widerstand, p. 1751.

2) Hutton, Trans. Roy. Soc. Edinb. 2.

3) J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc. 39. p. 417. 1885.

in den Tropfen Wirbelbewegungen erregen kann, indem sie die äussere Fläche im Vorbeiströmen mit sich reisst. Dabei hat sie nicht nur die innere Flüssigkeitsreibung zu überwinden, sondern, insbesondere bei Wasser, auch Arbeit deshalb zu leisten, weil unten neue Oberfläche gebildet wird, während oben zwar gleich viel, aber ältere, also, wie sich noch zeigen wird und auch schon bekannt ist, bei Wasser schwächer gespannte Oberfläche verschwindet. Daher kommt es auch, dass sich solche Wirbelbewegungen in Wasser weit schwerer bilden als in Alkohol, wie folgender Versuch zeigt. Ein, kleines Bechergläschen war bis oben voll mit Wasser gefüllt, in dem *Lycopodium* suspendirt ist, um die Strömungen verfolgen zu können, die ein breiter, ziemlich starker Luftstrom, schief über die Oberfläche geblasen, erzeugte. Es bilden sich nur kreisende Bewegungen in horizontalen Bahnen aus, wobei die Theilchen der Oberfläche also immer in derselben bleiben. An den Stellen, wo der Luftstrom am stärksten angreift, folgen sie ihm, wo er schwächer ist, kehren sie beiderseits wieder zurück. Dasselbe ergab mit Gewalt aus der Wasserleitung geströmtes Wasser, dessen Bewegungen man durch die unzähligen Luftblasen, durch die es wolkig getrübt erscheint, verfolgen kann. Derselbe Versuch mit Alkohol ergibt, dass die mit dem Luftstrom nach einer Richtung bewegten Oberflächentheile untertauchen und im Inneren der Flüssigkeit zurückkehren, also in verticalen Bahnen kreisen. Nur bei Alkohol bildeten sich also unter den Umständen dieses Versuches Bewegungen, die den oben erwähnten Wirbeln entsprechen und in Tropfen stattfinden können. Davon noch bei den Messungen mit Alkoholtropfen.

7. Die folgende Tabelle enthält Versuche mit Wassertropfen, die hauptsächlich angestellt wurden, um zu sehen, welchen Einfluss die Amplitude auf die Schwingungsdauer hat, und wie sich die Oberflächenspannung mit der Zeit ändert.

Der verschiedenen Länge des Stäbchens in Columnne 1 entsprechen die Amplituden der Columnne 2, diese sind angegeben durch das Verhältniss der grössten Dehnung der Hauptaxe der Gleichgewichtskugel zur Hauptaxe (oder Durch-

messer) selber, und zwar sind es mittlere Amplituden, denn dieselben nehmen von oben nach unten ab, wovon noch im Abschnitt 8 die Rede sein wird. Ihre Grösse wurde auf folgende Art gefunden. Es war eine Tafel entworfen, welche neben der numerischen Angabe verschiedener Amplituden ($\frac{1}{30}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ etc) die Zeichnung zweier Ellipsen enthielt, der Meridianschnitte nämlich eines Tropfens in den zwei äussersten Elongationen der angeschriebenen Amplitude. Hatten sich nun durch Verfolgung des Tropfens nach der im Anfang des Abschnittes 3 angegebenen Art das äusserste flache und gedehnte Ellipsoid dem Gedächtniss eingeprägt, so konnte man es in der Zeichnung aufsuchen (dieselbe nöthigenfalls durch eine vergrössernde oder verkleinernde Linse betrachtend) und die Amplitudenangabe entnehmen. Die Beobachtung wurde wiederholt — wobei natürlich die vorhergehenden Bilder dem Gedächtniss schon verschwunden sein müssen — und das Mittel der Resultate genommen.

Tabelle III. Wasser.

Beschaffenheit d. Röhre	Ampl.	Temp.	Zeitintervall zweier Tropfen	p	Höhen der totalen Reflexe						α
					Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	
Apparat mit Stäbchen.											
Stäbchen vorsteh. um mm		$^{\circ}\text{C.}$	sec	g		cm		cm		cm	$\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$
21,6	$\frac{1}{30}$	15,7	0,273	0,05646	0	141,755	7	105,263	14	28,290	7,533
21,7	$\frac{1}{15}$	14,3	0,455	0,05015	0	141,255	8	101,131	16	13,743	7,415
25,6	$\frac{1}{10}$	15,8	0,500	0,06131	0	190,63	7	152,66	14	69,92	7,404
29,6	$\frac{1}{5}$	16,7	0,349	0,05947	0	141,475	7	103,309	14	22,479	7,525
—	$\frac{1}{5}$	15,9	0,517	0,05953	0	141,310	7	103,801	14	22,854	7,402
30,3	$\frac{1}{5}$	16,0	0,353	0,05757	0	141,200	7	104,908	14	26,743	7,437
Apparat ohne Stäbchen.											
Glasrohr		16,7	0,199	0,03686	0	165,605	8	141,877	16	83,987	7,756
"		15,0	0,341	0,03505	0	165,060	9	136,242	18	64,944	7,905
Papierstutz	$\frac{1}{5}$	—	0,379	0,08615			10	132,554	20	47,552	7,339
"		17,2	0,448	0,06014	0	159,665	7	129,860	14	54,703	7,284
"		15,5	0,451	0,03607	0	157,815	9	130,139	18	57,251	7,187
"	$\frac{1}{5}$	15,8	0,674	0,03632	0	157,820	9	130,116	18	57,406	7,271
"		16,6	0,909	0,05420	0	196,24	8	162,35	16	75,90	7,331
"		18,9	1	0,03576	0	194,62	8	172,23	16	114,23	7,283
Glasrohr		16,5	1,05	0,03327	0	164,930	10	134,428	20	53,346	7,269
							11	128,552	22	30,624	7,141

Die Temperatur ist im Wasserbehälter zur selben Zeit gemessen, als die Tropfen behufs Wägung aufgefangen wurden. Columnne 5 enthält das Gewicht eines Tropfens p .

Col. 4 gibt die Zeit, welche ein Tropfen brauchte, um sich zu bilden, also ein Maass für das Alter seiner Oberfläche.

Die Höhen der Reflexe sind sämmtlich Mittelwerthe aus Ablesungen, die symmetrisch zur Gewichtsbestimmung vor und nach derselben vertheilt waren. Von den tiefsten Reflexen sind die meisten Ablesungen gemacht worden.

α , die Oberflächenspannung ist nach Gl. (1) ($n = 2$):

$$\alpha = \frac{3}{2} \pi \cdot \frac{p}{g T^2},$$

berechnet. Wurden die Reflexe 0, n , $2n$ beobachtet, so ist in dieser Gleichung die Schwingungsdauer $T = n T_n$, wenn T_n die Zeit ist, während welcher der Tropfen von einem zum anderen der beobachteten Reflexe fällt, und diese Zeit kann aus Gl. (3) gefunden werden, in welcher A_1 und A_2 die Höhenunterschiede des 0. und n ., n . und $2n$. Reflexes sind. γ ist $= 0,153$. Diese Gl. (3) kann man aber für diese Berechnung noch vereinfachen, indem bei den geringen Fallhöhen, die hier in Betracht kommen, ohne die kleinste Einbusse an Genauigkeit $m = 0$, $g^3 T^6 / 360 = 0$ gesetzt werden kann; ferner ist auch $g^2 T^4 / 12$ gegen $(A_2^2 + A_1^2) / 2$ so klein, dass man es dem angenäherten Werth $(A_2 - A_1)^2 / 12$ gleich setzen kann und für die Schwingungsdauer die Gleichung:

$$g T_n^2 = A_2 - A_1 + \frac{\gamma \varrho}{D \cdot r} \left(\frac{A_2^2 + A_1^2}{2} - \frac{(A_2 - A_1)^2}{12} \right) + \left(\frac{\gamma \varrho}{D r} \right)^2 \frac{A_2^3 - A_1^3}{6}$$

erhält. Wie man sieht, braucht man, um α zu berechnen, g gar nicht zu kennen und auch das spec. Gew. der untersuchten Flüssigkeit ist nur zur Correction wegen des Luftwiderstandes in $D r$ nöthig.

Die erhaltenen Werthe von α wurden noch mit Hülfe der Brunner'schen Formel:

$$\alpha_t = \alpha_0 (1 - 0,001866 t)$$

auf 16° reducirt, aber dies ist zum Theil überflüssig, weil bei diesen Versuchen die Temperatur der Oberfläche wegen der Verdampfung beim Fall doch um eine unbekannte An-

zahl Grade erniedrigt wurde. Ich habe deswegen noch in Tab. IV einige Versuche mitgetheilt, bei welchen dieser Umstand wegfällt.

Vergleicht man die in den mit verschiedenen Amplituden unter sonst nahe gleichen Umständen angestellten ersten sechs Versuchen der Tab. III erhaltenen α und bemerkt dazu, dass auch ohne Stäbchen die Amplitude nur $\frac{1}{4}$ beträgt, so sieht man, dass die Amplituden, in denen diese von Röhren einzeln abfallenden Tropfen schwingen, als verschwindend klein zu betrachten sind; ihre Grösse ist für die Schwingungsdauer bei der hier erreichten Genauigkeit gleichgültig und wurde daher in den weiteren Versuchen nicht mehr gemessen.

Die übrigen Versuche mit dem Apparat ohne Stäbchen sind nach der Ausflussgeschwindigkeit, die eine sehr verschiedene ist, geordnet, um die schon erwähnte Veränderlichkeit von α mit der Zeit hervortreten zu lassen. Der aufsteigenden Reihe der Zeiten in Col. 4 entspricht die ziemlich regelmässig absteigende Reihe der α in der letzten Columnne, und diese Reihe wird auch dadurch nicht gestört, dass einige der Versuche mit einer Glasröhre angestellt sind, die statt des Papierstutzens ein senkrecht zur Axe abgeschliffenes Ende hatte. Sie war mit conc. Salpetersäure, Wasser und Alkohol gewaschen, während die Röhren mit Papierstutzen unter Wasser gereinigt wurden. Auch die sechs ersten, mit dem Stäbchen erhaltenen Werthe passen in diese absteigende Reihe der α .

In Tab. IV sind die Versuchsergebnisse an möglichst rasch sich bildenden Wassertropfen zusammengestellt, die durch ein Rohr fielen, in dem die Luft durch Befeuchten der Wände mit Wasserdampf gesättigt war. So war die Abkühlung der Oberfläche durch Verdampfung vermieden. Das 26 mm weite Rohr war sehr gleichmässig cylindrisch, sodass der Maassstab ausserhalb desselben aufgestellt werden konnte. Er bestand bei diesen Versuchen eigentlich nur aus einem Papierstreifen, der an die Röhre befestigt war, und auf welchem längs der Kante eines Schiebers mit dem Spiegel, Bleistiftmarken gezogen wurden. Dazu war auf den halbbe-

legte
Eins
birte
sind,
so er
gross
sind
gena

Temp

°C.

19,8

14,

16,

17,

mes
glei
red

nur
nal
flus
hei

der
der
der

legten Spiegel eine horizontale Linie geritzt, welche beim Einstellen den betreffenden Reflex und das Pupillenbild halbirte. Die Abstände der Bleistiftmarken von der obersten sind, im Mittel, die in der Tabelle angegebenen Höhen. Die so erreichte Genauigkeit genügt vollkommen, da immer nur grosse Distanzen zu messen sind, denn die oberen Reflexe sind, wie schon oben erwähnt, unbrauchbar, weil sie nicht genau mit den flachsten Ellipsoiden zusammenfallen.

Tabelle IV.

Wassertropfen in gesättigtem Dampf.

Apparat mit Stäbchen.

Temp.	Zeitintervall zweier Tropfen	p	Höhen der Reflexe				α	
			Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	Ref.	Höhe
°C.	sec	g		cm		cm		mg/mm
19,8	0,172	0,04888	0	0	6	23,52	12	74,44
					7	30,06	14	97,96
					8	37,21	16	122,76
14,9	0,231	0,06271	0	0	6	29,93	12	95,29
					7	38,38	14	124,90
16,9	0,240	0,06315	0	0	6	30,45	12	95,52
					7	38,61	14	125,28
17,3	0,240	0,06334	0	0	6	30,79	12	96,70
					7	39,45	14	126,65

Die Temperaturen sind wieder im Wasserbehälter gemessen; Wasser- und Lufttemperatur waren immer nahe gleich. α ist nach der oben angegebenen Formel auf 16° reducirt.

Die tieferen Reflexe haben kleinere Oberflächenspannungen ergeben, was ganz mit der oben besprochenen Abnahme der Spannung mit der Zeit übereinstimmt. Der Ausflussapparat war vor jedem der vier Versuche längere Zeit heissen Wasserdämpfen ausgesetzt.

Man könnte denken, dass diese Abnahme herrührt von dem langsamen Verschwinden der Abkühlung, welche mit der Bildung von Oberfläche verbunden ist, aber das ist nicht der Fall, denn diese Abkühlung ist sehr gering, sie besteht

bei Wasser, wie Sir W. Thomson aus dem Kreisproceß an einer Seifenblase gefolgert hat¹⁾, in der Entziehung einer Wärmemenge, die äquivalent ist etwa der halben Arbeit bei Bildung der Oberfläche, also in 1 qmm Oberfläche $(7,3 \cdot 10^{-9}) / (2 \cdot 426) = 0,0086 \cdot 10^{-9}$ Calorien, und würde diese Wärmemenge einzig nur einer Oberflächenschicht von 0,00005 mm Dicke (Radius der Wirkungssphäre) entzogen, so entstünde eine Abkühlung um $0,0086 \cdot 10^{-9} / 0,00005 \cdot 10^{-6} = 0,17$ °C., welche die Oberflächenspannung nur um $0,0024 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ vergrößert, aber selbst eine stärkere Abkühlung einer so dünnen Schicht wäre durch Wärmeleitung in kaum messbarer Zeit schon verschwunden.

Vielmehr ist die Ursache der Abnahme der Oberflächenspannung wahrscheinlich auch hier in Verunreinigung der Oberfläche mit fremden Substanzen, die sich mit ihrer geringen Oberflächenspannung auf dem Wasser ausbreiten, zu suchen. Dafür sprechen folgende Versuche mit Seifenlösung. Die Tabelle ist ganz wie die vorige angeordnet.

Tabelle V.

Seifenlösung.

Apparat ohne Stäbchen, abgeschliffenes Glasrohr.

Temp.	Zeitintervall zweier Tropfen	p	Höhen der Reflexe						α 16°C.
			Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	
°C.	sec	g		cm		cm		cm	mg/mm
15,4	0,254	0,02385	0	181,660	6	164,305	12	117,967	3,357
15,4	0,435	0,01812	0	181,875	7	162,527	14	112,510	3,244
15,5	1,111	0,01358	0	182,370	7	166,673	14	126,584	3,073

Diese Lösung, wovon 1 l nur 1 g Marseillerseife enthält, hat beinahe sämtliche physikalische Eigenschaften des Wassers unverändert bis auf eine gewisse Zähigkeit und kleine Spannung in der Oberfläche. Der kleineren Oberflächenspannung entsprechend gibt es weniger Substanzen, die sich auf Seifenlösung ausbreiten und deren Oberfläche verunreinigen können, als auf Wasser, was die gefundene geringere Veränderlichkeit von α bei dieser Lösung erklären

1) W. Thomson, Proc. Roy. Soc. 9. p. 255. 1858.

kann. Die in der Tabelle enthaltenen Werthe sind der Abkühlung durch Verdampfung wegen zu gross; nach Sondauss' Methode des Abreissens eines Ringes fand ich $\alpha = 2,684$ mg/mm, doch kam es hier auf absolute Bestimmung nicht an.

Alkohol, mit noch kleinerer Constante, ergab keine Aenderung der Oberflächenspannung mit der Zeit, wie der Vergleich der zwei Versuche mit den Zeitintervallen 0,32 und 1,23 Sec. in der folgenden Tabelle zeigt. Die einzelnen Columnen haben dieselbe Bedeutung wie in den vorigen Tabellen; die Constanten sind mit Hülfe der Formel $\alpha_t = \alpha_0 (1 - 0,00339 t)$ auf 16 °C. bezogen.

Tabelle VI.

Alkoholtropfen in gesättigtem Dampf.

Spec. Gew. des Alkohols bei 19 °C. 0,819 g/cm³.

Temp.	Zeitinter- vall zweier Tropfen	p	Höhen der Reflexe						α 16°C.
			Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	Ref.	Höhe	
Apparat ohne Stäbchen.									
°C.	sec	g		cm		cm		cm	mg/mm
16,5	0,322	0,006 484	0	0	5	5,94	10	18,51	2,480
					6	7,46	12	25,68	2,481
					7	9,80	14	34,05	2,495
					8	12,36	16	43,34	2,500
					9	15,22	18	53,53	2,523
					10	18,51	20	65,00	2,537
Apparat mit Stäbchen.									
11,4	1,23	0,01310	0	0	5	13,66	10	42,05	2,462
					6	18,21	12	56,38	2,580

Hier tritt aber ein anderer Umstand auf, der die Zunahme der α nach unten bewirkt, und da die Oberflächenspannung des Alkohols mit der Zeit nicht zunimmt, kann diese Vergrösserung nur eine scheinbare sein. Wahrscheinlich werden die Schwingungen der Alkoholtropfen durch Wirbelbewegungen gestört, von denen schon p. 231 gezeigt ist, dass sie in Alkohol viel leichter entstehen, als in Wasser. Da sich nicht feststellen lässt, inwieweit solche Bewegungen schon die oberen Reflexe beeinflussen, kann man auf die mit

Alkohol erhaltenen Werthe kein Gewicht legen. Es ist auch auffallend, dass bei Alkohol die totalen Reflexe schon in einer Tiefe von 1 m schwer zu sehen sind, während sie an Wassertropfen vom Dache eines stockhohen Hauses noch sehr auffallend hell sind. Versuche mit Alkohol in freier Luft ergaben ein kaum grösseres α , was ich mir dadurch erkläre, dass durch die Wirbelbewegungen Oberfläche und Inneres der Tropfen immerfort ausgetauscht und so eine Abkühlung der Oberfläche durch Verdampfung vermieden wurde.

Zwei mit Quecksilber angestellte Versuche ergaben folgende Resultate:

Tabelle VII.

Quecksilber.

Apparat ohne Stäbchen; abgeschliffenes Glasrohr.

Temp.	Zeitintervall zweier Tropfen	Anzahl der Schwing.	T	p	α
°C.	sec		sec	g	mg/mm
17,8	0,39489	20	0,019 745	0,15164	46,72
18,3	0,40648	$20 + \frac{3}{4}$	0,019 590	0,15169	47,48
Mittel					47,10,
					$\alpha^2 = 6,948$ qmm

Der Apparat zu diesen Versuchen war ganz der zur Untersuchung des Luftwiderstandes angewandte, nur fehlte die Messlatte, und statt der Höhen der durch die Funken beleuchteten Tropfen wurde ihre Form beobachtet. Dabei war der Zufluss des Quecksilbers so regulirt, dass der oberste und zweite Tropfen eine bestimmte Phase der Schwingung hatte — so waren im ersten Versuch beide Tropfen kugelförmig, im zweiten der obere ein Ellipsoid im Maximum der Dehnung, der untere eine Kugel —, wieviel ganze Schwingungen sich zwischen diesen beiden Phasen befanden, konnte man an den periodischen Lichterscheinungen abzählen, die bei beliebiger Beleuchtung der Tropfen sichtbar sind. Es waren in beiden Versuchen 20. Die Zeit zwischen zwei Tropfen wurde hier sehr genau dadurch bestimmt, dass der

Tropfenunterbrecher ausser dem primären Strom des Funkeninductors auch noch den Strom eines Zeitregistriapparates öffnete oder eigentlich mittelst Relais schloss. So konnte man dieses Zeitintervall vom Papierstreifen des Regsitriapparates nach den Secundenpunkten genau bestimmen. Mit der Anzahl der Schwingungen dividirt, gibt es die Schwingungsdauer T , aus welcher mittelst des Tropfengewichtes p α berechnet wird. Der Luftwiderstand kommt bei dieser Versuchsanordnung gar nicht in Betracht. Das Quecksilber war in der Art gereinigt, wie es Professor Quincke zu seinen Versuchen über die Ausbreitung ausführte¹⁾, in dasselbe tauchte ein Platindraht, der etwa während des Versuchs entstandene Electricität zur Erde ableiten konnte.

8. In diesem Abschnitt habe ich nur noch zurückzukommen auf zwei Umstände: die innere Reibung und die Electricität, von denen zu zeigen ist, dass sie keinen Einfluss auf die mitgetheilten Resultate hatten.

Die innere Reibung der Flüssigkeit dämpft die Schwingungen der Tropfen und ändert so die Amplitude sowohl als auch die Schwingungsdauer. Man kann aus der Aenderung der ersteren die der letzteren berechnen.

Haben die Schwingungen das logarithmische Decrement λ , so sind die Amplituden durch:

$$a_2 = A e^{-\lambda \frac{t}{T}} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} \right)$$

dargestellt, und es ist daher ($n=2$) die potentielle Energie der Oberflächen:

$$P = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{-2\lambda \frac{t}{T}} \cos^2 \left(2 \pi \frac{t}{T} \right),$$

die kinetische der Massentheile:

$$K = \frac{1}{5} \pi \sigma a^3 \frac{A^2}{T^2} e^{-2\lambda \frac{t}{T}} \left[2 \pi \sin \left(2 \pi \frac{t}{T} \right) + \lambda \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} \right) \right]^2.$$

K wird ein Minimum, $k=0$, zur Zeit $t_0 = T/2 \pi \operatorname{arctg} \lambda/2 \pi$ einer Lösung der Gleichung:

1) Quincke, Pogg. Ann. 139. p. 66. 1870.

$$2\pi \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \lambda \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 0.$$

Der höchste Werth von K , bestimmt durch $\partial k / \partial t = 0$, tritt ein, wenn $t = T/4, 3T/4, \dots$ Es ist also, da:

$$\cos^2\left(\arctg \frac{\lambda}{2\pi}\right) = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2}$$

$$\text{zur Zeit } t=t_0 \quad P_0 = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{2\pi}} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2}, \quad K=0$$

$$\text{„ „ } t = \frac{T}{4} \quad P_{1/4} = 0, \quad K_{1/4} = \frac{4}{5} \pi^3 \sigma \alpha^3 \frac{A^3}{T^3} e$$

$$\text{„ „ } t = t_0 + nT \quad P_n = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{2\pi} - n\lambda} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2}, \quad K=0.$$

Die Energiemenge, welche während den Schwingungen durch die Reibung in Wärme übergang, ist daher:

$$P_0 + K_0 - P_n - K_n = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{2\pi}} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2} \left(1 - e^{-2\pi\lambda}\right).$$

Erwägt man nun, dass schon während einer Viertelschwingung die Massentheile des Tropfens alle Geschwindigkeiten, von denen ja die Reibung abhängt, durchlaufen, dass also die Energieverluste der Viertelschwingungen demselben Gesetze folgen, wie die der ganzen Schwingungen, so hat man die im Zeitraum $(T/4) - t_0$ verwandelte Energiemenge, indem man $n = (T/4 - t_0)/T$ setzt:

$$w = \frac{8}{5} \pi \alpha A^2 e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{2\pi}} \cdot \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + \lambda^2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{2\pi}}\right).$$

Nun ist dem Princip der Erhaltung der Energie zufolge:

$$P_0 + K_0 = P_{1/4} + K_{1/4} + w$$

und daraus, indem alle Exponentialgrößen wegfallen:

$$(I) \quad T^2 = \frac{3}{8} \pi \frac{p}{\alpha g} \cdot \frac{4\pi^2 + \lambda^2}{4\pi^2},$$

wo wieder p das Tropfengewicht, $\frac{4}{3} \pi^3 \sigma \alpha g$, bezeichnet. $(4\pi^2 + \lambda^2)/4\pi^2$ ist der Factor, der durch die Reibung hinzukam.

Die folgende Tabelle enthält Beobachtungen über das

logarithmische Decrement λ , die beweisen, dass der Factor, der die Ueberschrift der letzten Columnne bildet, so nahe = 1 ist, dass es ganz weggelassen werden konnte. Bei zähen Flüssigkeiten ist dies bei weitem nicht der Fall. Leinöl gibt, obwohl dessen Dichte und Oberflächenspannung von der des Alkohols nicht viel verschieden ist, innerhalb der Höhe eines Meters nur einen einzigen Reflex, so sehr werden die Schwingungen hier durch die innere Reibung verlangsamt.

Tabelle VIII.

Flüssigkeit	p	Amplituden	λ	$\frac{4\pi^2 + \lambda^2}{4\pi^2}$
Wasser	0,05	1. Schwingung	0,190	0,0185
		11. "	0,158	
"	0,06	1. "	0,200	0,0268
		11. "	0,153	
"	0,04	1. "	0,173	0,0216
		16. "	0,125	
" (Photogr. Abb.)	0,09	1. "	0,20	0,0391
		10. "	0,14	
Seifenlösung	0,023	1. "	0,192	0,0659
		12. "	0,093	
"	0,018	1. "	0,215	0,0574
		13. "	0,108	
Alkohol	0,0066	1. "	0,187	0,0772
		12. "	0,080	
"	0,004	1. "	0,150	0,0592
		11. "	0,083	
Quecksilber	0,15	1. "	0,18	0,0203
		21. "	0,12	

λ ist nach seiner Definitionsgleichung:

$$e^{\lambda^2} = \sqrt[n_2 - n_1]{\frac{\text{Amplitude d. } n_1 \text{ten Schwingung}}{\text{Amplitude d. } n_2 \text{ten Schwingung}}}$$

berechnet, aus welcher ersichtlich, dass es gleichgültig ist, ob die Amplituden als absolute Längen oder im Verhältnisse zu einer constanten Länge gemessen sind. Der Werth der letzten Columnne ist nur für das grösste λ berechnet, für die übrigen wäre er noch näher 1.

Im Verlauf dieser Untersuchungen ist die Electricität oft benutzt worden, um die Formen der Tropfen zu studiren. Es ist aber bekannt, dass Electricität die Oberflächenspannung verringert. Nähert man dem Ausflussapparat einen electrischen Körper oder ladet ihn statt durch Vertheilung durch Berührung, so fallen die Tropfen viel schneller nach einander, also kleiner ab. Dabei fällt es auf, dass alle totalen Reflexe ihre Orte beibehalten, solange das Abtropfen nicht durch allzu hohe Spannungen unregelmässig wird, dass also die Schwingungsdauer der Tropfen sich nicht ändert. Ganz dieselbe Unveränderlichkeit der Schwingungsdauer wird beobachtet, wenn man im Ausflussapparat zwischen dem engen Rohr, das die Ausflussgeschwindigkeit regulirt, und der Mündung des Rohres eine horizontale Metallröhre einschaltet und diese mit einer Flamme langsam erhitzt: wenn die Tropfen schon dampfen und sich bedeutend verkleinert haben, sind die totalen Reflexe noch immer an ihren Stellen geblieben. Diese Erscheinungen sind ein schöner experimenteller Beweis dafür, dass die Tropfengewichte eines und desselben Ausflussrohres proportional α sind¹⁾, denn wenn die Schwingungsdauer:

$$T = \sqrt{\frac{3}{8} \pi \frac{p}{g \alpha}},$$

unverändert bleibt, während α (durch Electricität oder Wärme) verändert wird, muss sich p proportional mit α ändern; alle übrigen Grössen sind ja Constanten. Es ist noch zu beweisen, dass die Beleuchtungsfunken des Inductors die Oberflächenspannung nicht geändert haben; dies kann durch folgenden Versuch geschehen:

Tropfengew. ohne electr. Einfluss (aus 50 Tropfen)	0,05316 g,
Tropfengew., wenn die Funken, etwas unterhalb der Rohrmündung, 10 cm von den Tropfen ent- fernt, überspringen	0,05321 g,

woraus zu sehen ist, dass das Tropfengewicht, also auch die Oberflächenspannung unverändert blieb.

1) vgl. Quincke, Pogg. Ann. 135. p. 626. 1868.

Zum Schluss bleibt mir nur noch die Erfüllung der angenehmen Pflicht übrig, meinen verehrten Lehrern, Geheimrath H. von Helmholtz und Professor G. Quincke meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen für die Theilnahme und Unterstützung, welche sie mir bei meiner Arbeit zu Theil werden liessen.

Heidelberg, Juni 1886.

II. Ueber die Bestimmung der specifischen Gewichte einiger Gemische von Aethylalkohol und Kohlensäure; von Ad. Blümcke.

(Aus dem physikal. Laborat. der techn. Hochschule in München.)

(Hierzu Taf. III Fig. 4–7.)

Vor einiger Zeit veröffentlichte ich ein auf einer einfachen Verwendung des archimedischen Princips beruhendes Verfahren zur Bestimmung des spec. Gewichts von Flüssigkeiten, welche nur unter hohen Drucken bestehen können.¹⁾

In der vorliegenden Arbeit habe ich dasselbe auf Gemische von Aethylalkohol und Kohlensäure angewendet.

Die einzelnen Theile der Versuchsvorrichtung erlitten einige geringfügige Aenderungen: Der Schwimmer erhielt das aus der Abbildung ersichtliche Aussehen. Fig. 4. Der zweifach gebogene Neusilberdraht *W*, welcher um eine Axe bei *C* drehbar war, trug auf der einen Seite den von drei Federn gehaltenen Spiegel *S*, auf der anderen die an einem dünnen Drahte befestigte gläserne Hohl-Kugel *K* und das verschraubbare, mit einer Gegenmutter feststellbare Laufgewicht *L*, durch dessen passende Stellung dem Schwimmer jede erwünschte Anfangsstellung gegeben werden kann. Die Aichung des Schwimmers geschah mit Hülfe von Wasser-Alkoholmischungen von bekannter Dichte bei den Temperaturen, welche bei den Kohlensäuremischungen in Anwendung kamen. Die specifischen Gewichte dieser Vergleichsflüssigkeiten wurden bei der Zimmertemperatur be-

1) A. Blümcke, Wied. Ann. 23. p. 404. 1884.

stimmt und mittelst der Tafeln Mendeleew's auf 4° C. reducirt. Bei den grossen Aenderungen der specifischen Gewichte waren diese nicht mehr einfach proportional den Scalenausschlägen, es ist aber wohl überflüssig die Aichungstabellen hier mitzuthemen. Wegen der Verschiedenheit des Lichtbrechungsverhältnisses der Wasser-Alkoholgemische von denen der zu untersuchenden Flüssigkeiten musste an den Resultaten noch eine Correctur angebracht werden.

Die Brechungsverhältnisse der ersteren berechnete ich aus den Angaben v. d. Willigen's,¹⁾ die sich auf 23° C. beziehen, für die Versuchstemperaturen, indem ich für jeden Grad Temperaturzunahme eine Abnahme des Brechungsverhältnisses von 0,0004 annahm.

Für das Brechungsverhältniss der flüssigen Kohlensäure fand ich nur eine Angabe von Bleekrode,²⁾ welche sich auf 15° C. bezieht (1,196). Für die Versuchstemperatur berechnete ich die Brechungsverhältnisse nach der bekannten Formel $(n - 1)/d = \text{const.}$, wo n das Brechungsverhältniss, d die Dichte bedeutet.

Ich benutzte die von mir erhaltenen uncorrectirten Werthe für d , um in bekannter Weise durch mehrmalige Rechnung den Werth der Constanten und der Brechungsverhältnisse zu ermitteln. Es ergab sich:

$$n = 1,213 \text{ für } 0,4^{\circ} \quad n = 1,193 \text{ für } 17^{\circ} \quad n = 1,166 \text{ für } 25^{\circ}.$$

In ganz ähnlicher Weise wurden die Brechungsverhältnisse der Mischungen nach der Formel:

$$\frac{N-1}{D} \cdot P = \frac{n_1-1}{d_1} p_1 + \frac{n_2-1}{d_2} p_2,$$

berechnet, wo N , n_1 , n_2 die Brechungsverhältnisse des Gemisches und der Bestandtheile, D , d_1 , d_2 die bezüglichen Dichten und P , p_1 , p_2 die Gewichte derselben bedeuten.

Es darf nicht verhehlt werden, dass die Nothwendigkeit der Kenntniss der Brechungsverhältnisse der zu untersuchenden wie der Vergleichsflüssigkeiten als auch der das Rohr

1) v. d. Willigen, Musée Teyler. (3) 2. p. 222—237. Fortschritte der Physik im Jahre 1869. XXV. Jahrg. p. 287.

2) Bleekrode, Proc. Roy. Soc. Lond. 37. p. 339—362. 1884. Beibl. 9. p. 418. 1885.

schliessenden Glasplatte unter Umständen ein Nachtheil des Verfahrens sein kann; man kann aber die anzubringenden Correcturen zum Vernachlässigen klein machen, wenn man dafür sorgt, dass die Winkel, um welche der Spiegel *S* gedreht wird, gering sind. Im ungünstigsten Fall entsprach die Correctur bei meinen Versuchen (Temperatur $0,4^{\circ}$) einer Aenderung des spec. Gewichts von 0,015; bei einer Drehung des Spiegels 11° ungefähr.

Während bei den früher mitgetheilten Versuchen über Wasser und Kohlensäure zuerst das Gas und dann eine abgemessene Menge Wasser in das zur Aufnahme der Flüssigkeit dienende Rohr gepumpt wurde, verfuhr ich jetzt wegen der nicht mehr zu vernachlässigenden Volumenzunahme des Alkohols umgekehrt. Es wurde zunächst in das den Schwimmer enthaltende Rohr, welches diesmal aus Phosphorbronce bestand, an beiden Enden offen war, eine Länge von 12 cm und einen Durchmesser von 6 cm bei einer Wandstärke von 2 cm hatte, eine bestimmte Menge Alkohol gebracht; hierauf dasselbe mit einer Schraube verschlossen und dann ganz mit Kohlensäure gefüllt.

Wegen der ziemlich beträchtlichen erforderlichen Menge Kohlensäure stellte ich dieselbe nicht mehr selbst her, sondern verband einfach eine von der Berliner Actiengesellschaft für Kohlensäureindustrie bezogene Flasche passend mit dem Rohre und liess die zum Versuche nöthige Menge überfließen. Bei Temperaturen im Versuchsrohre, die nicht über der Zimmertemperatur liegen, geht das Ueberfließen sehr leicht, es wird aber unmöglich, wenn die Temperatur in der Flasche geringer ist, als die im Rohre. Sollten die Bestimmungen bei höherer als der Zimmertemperatur ausgeführt werden, so liess ich die Kohlensäure zuerst überströmen und erwärmte dann erst das Versuchsrohr durch ein Wasserbad, welches vorher bereits erwärmt war.

Während der Dauer des Versuchs wurde die Temperatur durch einen Thermostaten constant erhalten. Ich benutzte dabei mit Vortheil die von mir angegebene Modification.¹⁾

Zur Aufnahme des Wasserbades diente ein Kasten,

¹⁾ Wied. Ann. 25. p. 419. 1885.

dessen Vorder- und Hinterseite ein kreisförmiges Loch besass, auf deren Ränder 2 cm hohe Ringe aufgelöthet waren, die etwas über die zum Anpressen der Glasplatten dienenden Ringe übergrieffen; die zwischen ihnen bestehenden Zwischenräume wurden mit Kautschukbändern gedichtet. Die Temperatur im Innern des Rohres wurde mit Hülfe eines Thermometers bestimmt, welches in einer kleinen Metallbüchse stak, die in die Verschlusschraube des Rohres eingelöthet war und bis nahe zum Boden reichte. Die Büchse war mit etwas Weingeist gefüllt.

Die zum Mischen verwendete Gasmenge wurde bestimmt mit Hülfe eines zweiten Rohres von bekanntem Volumen. Es stand mit dem ersteren durch ein Kupferrohr in Verbindung und konnte durch ein Ventil abgesperrt werden. Beim (sehr vorsichtigen) Oeffnen des letzteren strömt ein Theil der Kohlensäure (und eine sehr kleine Menge Alkoholdampf) über, schliesst man hierauf ab, so lässt sich die übergangene Gasmenge aus dem Volumen des Rohres, dem Druck und der Temperatur leicht mit Hülfe der von mir nach der Clausius'schen Formel berechneten Tabelle ermitteln. Dabei wurde noch angenommen, dass die Anwesenheit der Alkoholdämpfe die Formel nicht unbrauchbar machte. Nachdem die Gasmenge durch ein zweites kleineres Ventil ins Freie gelassen ist, kann das Ueberströmen wieder beginnen, bis nur noch die unter gewöhnlichem Druck aufnehmbare Menge im Alkohol enthalten ist, welche sich nach den Bestimmungen Bunsen's¹⁾ leicht finden lässt. Zur Bestimmung des Druckes benutzte ich zwei Manometer, eines, welches die Drucke erst von 23 Atm. an abzulesen gestattete, das andere für die niederen Drucke. Das Glasgefäss des ersteren hatte ein Volumen, das einer Länge des engeren Theils von 1050 cm entsprechen würde.

Ein Thermometer zur Temperaturbestimmung befand sich in einer Metallbüchse, welche in eine zum Verschlusse des Rohres dienende Messingplatte eingelöthet war. Das Volumen des letzteren einschliesslich der Hohlräume der Manometer und Verbindungsrohre wurde ermittelt, indem

1) Bunsen, Gasometrische Methoden. p. 299. Braunschweig 1857.

eine bestimmte Wassermenge bei bekannter Temperatur eingepumpt und die Druckänderungen gemessen wurden. Die ganze Versuchsanordnung ist aus Fig. 5 ersichtlich.

Ich führte drei Versuchsreihen aus: die erste bei $0,4^{\circ}\text{C.}$, welche Temperatur durch zerkleinertes Eis sehr constant erhalten werden konnte; die zweite bei der Zimmertemperatur; diese schwankte zwischen $16,9^{\circ}\text{C.}$ und $17,7^{\circ}\text{C.}$, war aber während der Dauer eines Versuchs constant; die Resultate wurden auf 17°C. corrigirt mit Hülfe der ersten Versuchsreihe durch lineare Interpolation; die dritte bei 25°C. unter Anwendung des oben erwähnten Wasserbads. Die Temperatur schwankte zwischen $24,9^{\circ}\text{C.}$ und $25,1^{\circ}\text{C.}$

Der bei der dritten Versuchsreihe benutzte Alkohol war etwas wasserhaltiger als der bei den zwei übrigen verwendete.

Ich gebe im Folgenden die Resultate, wie sie sich durch graphische Interpolation aus den Versuchen ergeben. Die Gewichtsprocente p beziehen sich auf den Gehalt der Mischung an Kohlensäure.

p	$0,4^{\circ}\text{C.}$	17°C.	25°C.
	Druck 35 At.	Druck 55 At.	Druck 66 At. ¹⁾
Specifisches Gewicht			
0	0,810	0,795	0,790
10	0,826	0,808	0,799
20	0,841	0,822	0,808
30	0,858	0,835	0,818
40	0,874	0,848	0,827
50	0,890	0,859	0,836
60	0,899	0,870	0,845
70	0,916	0,876	0,852
80	0,925	0,877	0,844
90	0,931	0,871	0,830
100	0,934	0,841	0,728

Wenn schon zugegeben werden muss, dass wegen der nicht genau bekannten Brechungsverhältnisse der Kohlensäure und der Gemische den Zahlen eine kleine Ungenauigkeit anhaftet, so folgt doch mit aller Bestimmtheit für die zweite Reihe ein Maximum für das spec. Gewicht der ungefähr 80% Mischung, für die dritte für das der ungefähr 70% . Von dem Auftreten dieses Maximums bei der Tem-

1) Ich habe diese Drucke nicht selbst gemessen, sondern die Zahlen abgerundet den Tabellen Regnault's entnommen.

peratur 17° konnte ich mich leicht überzeugen, indem ich eine 60—80% Mischung herstellte und dann langsam Kohlensäure überfließen liess. Die letztere bildete dann eine deutlich sichtbare Schicht über der schwereren Mischung. Wir haben also etwas ganz Aehnliches wie bei den wässerigen Lösungen der Essigsäure. Es gelang mir nicht, eine Beziehung zwischen den specifischen Gewichten der Bestandtheile und denen der Gemische aufzufinden.

Auf beigegebener Zeichnung, Fig. 6, ist der Verlauf der Werthe der specifischen Gewichte dargestellt; als Abscissen sind die Procentgehalte, als Ordinaten die Dichten aufgetragen. Die punktirten Curven stellen die bezüglich des Einflusses der Verschiedenheit der Brechungsverhältnisse der Flüssigkeiten noch uncorrigirten specifischen Gewichte dar.

Ich habe ferner aus den specifischen Gewichten die Zunahme eines Volumens Alkohol berechnet. Ist n die Anzahl der aufgenommenen Volumen Kohlensäure in ccm bei 0° und 760 mm gemessen, so lässt sich das Volumen der Mischung bekanntlich ausdrücken durch $V = 1 + n \cdot \alpha$; wenn als Anfangsvolumen 1 ccm genommen wird.

Temp.	0,4° C.		17° C.		25° C.	
p	n	α	n	α	n	α
10	45	0,00199	45	0,00208	44	0,00224
20	103	198	101	206	100	222
30	177	197	174	207	172	221
40	275	197	270	208	268	221
50	412	199	405	210	402	221
60	618	202	607	211	603	222
70	962	203	944	214	938	223
80	1649	204	1610	219	1608	230
90	3710	207	3641	223	3618	255
100	∞	210	∞	234	∞	265

Die anfängliche geringfügige Abnahme der Werthe von α ist ohne Bedeutung und erklärt sich leicht durch Beobachtungsfehler; dagegen ist in allen drei Reihen später ein Wachsen von α zu erkennen, welches bei höherer Temperatur viel bedeutender ist als bei niederer.

Die Volumenzunahme des Alkohols ist also nur bis zur ungefähr 50% Mischung proportional der aufgenommenen Kohlensäuremenge.

Ue
wir Bes
flüssig

der let

A

Glasroh

peratur

förmig

men de

letztere

Lussa

Kohlen

ratur

Resulta

Ich ha

stimme

Schwin

möglich

D

Dichte

bis 300

E

gleich

Werth

säure

* I
Interpo

1)

2)

3)

4)

Ueber das specifische Gewicht der Kohlensäure haben wir Bestimmungen von Andreew¹⁾ und zwar bei den Verflüssigungsdrucken. Die von ihm erhaltenen Werthe sind:

0,947 bei 0° 0,849 bei 17° 0,783 bei 25°,

der letzte Werth weicht also erheblich von dem meinigen ab.

Andreew bestimmte das specifische Gewicht, indem er Glasrohre mit Kohlensäure gefüllt auf die gewünschte Temperatur brachte und bestimmte, wie viel flüssig, wie viel gasförmig war, das Gesamtgewicht war bekannt, ebenso das Volumen des flüssigen und gasförmigen Theils; das Gewicht des letzteren wurde unter Annahme der Gültigkeit des Gay-Lussac-Mariotte'schen Gesetzes berechnet; da nun die Kohlensäure sehr stark in der Nähe der kritischen Temperatur von demselben abweicht, so ist der Unterschied im Resultat Andreew's und dem meinigen leicht erklärlich. Ich habe versucht, das specifische Gewicht bei 30° C. zu bestimmen, aber die Abnahme ist eine so schnelle, dass der Schwimmer den Boden berührte, eine Bestimmung also unmöglich wurde; jedenfalls liegt der Werth erheblich unter 0,7.

Die Versuche von Cailletet und Hautefeuille²⁾ über die Dichte der Kohlensäure beziehen sich auf Drucke von 100 Atm. bis 300 Atm. und sind daher mit den meinigen nicht vergleichbar.

Es ist nicht uninteressant, die sich aus den Zustandsgleichungen von Clausius³⁾ und Sarrau⁴⁾ ergebenden Werthe für das specifische Gewicht der flüssigen Kohlensäure mit den Versuchsergebnissen zu vergleichen.

Temp.	Specifisches Gewicht nach			
	Andreew	Blümcke	Clausius	Sarrau
-10	0,995	—	—	0,950
0	0,947	0,984*	1,053	0,856*
+10	0,895	0,881*	—	0,735
+20	0,827	0,814	0,788	0,685*
+25	0,783	0,728	0,678	0,618*
+30	—	<0,7	0,501	0,461

* Die mit einem Kreuz bezeichneten Werthe sind durch graphische Interpolation erhalten.

1) Andreew, Lieb. Ann. 110. p. 1. 1859.

2) Cailletet u. Hautefeuille, Compt. rend. 92. p. 903—1087. 1881.

3) Clausius, Wied. Ann. 9. p. 337. 1880.

4) Sarrau, Compt. rend. 101. p. 941 u. 1145. 1885.

Wie man aus beigegebener Zeichnung, Fig. 7, sieht, passt die Clausius'sche Formel besser zu den Versuchsergebnissen über Null, während es für die Sarrau'sche unter Null der Fall ist.

Ich werde die Versuche noch auf einige andere Flüssigkeiten ausdehnen.

Nachtrag. Erst als obige Arbeit bereits im Druck war, erfuhr ich von den Bestimmungen der spec. Gew. der flüssigen Kohlensäure bei den Verflüssigungsdrucken durch Cailletet und Matthias¹⁾, deren Verfahren die Fehlerquelle Andreev's vermeidet. Die von ihnen erhaltenen Werthe 0,908 bei 0°; 0,842 bei 10°; 0,748 bei 20° sind kleiner, als die meinigen. Es kann das wohl ausser in dem bereits in der Arbeit Gesagten noch darin seinen Grund haben, dass die von mir verwendete fabrikmässig hergestellte Kohlensäure wohl geringe fremde Beimengungen enthält.

III. *Untersuchungen über die Löslichkeit fester Körper und die den Vorgang der Lösung begleitenden Volum- und Energieänderungen;* *von F. Braun.*

(Aus den Sitzungsber. d. kgl. bayr. Acad. vom 3. Juli 1886 bearbeitet für die Annalen vom Hrn. Verf.).

I. Ueber den Einfluss des Druckes auf die Löslichkeit.

Wenn die Löslichkeit eines festen Stoffes, z. B. eines Salzes in einer Flüssigkeit vom Druck abhängig ist, so wird es möglich sein, diese Abhängigkeit zu ermitteln, indem man das Gemenge eines Salzes mit seiner gesättigten Lösung Druck- und Temperaturänderungen unterworfen denkt. Man kann dann offenbar unter Leistung oder Gewinn von äusserer Arbeit einen umkehrbaren Kreisprocess construiren. — Die

1) Matthias, Compt. rend. 102. p. 1202. 1886.

folgenden Betrachtungen gelten für die gesättigten Lösungen fester Körper, desgleichen mit geringfügigen Abänderungen für die zweier nicht in jedem Verhältniss mischbarer Flüssigkeiten ineinander. Zur Vereinfachung des Ausdruckes soll immer nur von einem Salz und seiner gesättigten Lösung gesprochen werden.

2. Die Maasseinheiten seien durchweg: G, C, S, °C., Grammcalthorien (cal). Es sei p der Druck, t die Temperatur, V das Volumen, E die innere Energie von Salz und Lösung, dQ die für eine unendlich kleine Aenderung von p und t dem Gemisch zugeführte Wärmemenge, \mathfrak{J} das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit, so ist:

$$\mathfrak{J} dQ = p dV + dE = \left(p \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial E}{\partial p} \right) dp + \left(p \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t} \right) dt.$$

Da dQ/T ein vollständiges Differential sein muss, so folgt daraus:

$$(1) \quad p \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial E}{\partial p} + T \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Es sei nun:

$$\begin{array}{l} r \text{ die Masse der gesättigten Lösung } \} [G] \\ \varrho \text{ " " des Salzes } \\ v \text{ das spezifische Volumen der gesättigten Lösung } \} [G^{-1}C^3] \\ \varphi \text{ " " " des Salzes } \\ p \text{ der Druck, bei welchem alle Grössen gemessen sind } [GC^{-1}S^{-2}] \\ m \text{ der cubische Compressionscoefficient der Lösung } \} [p^{-1}] \\ \mu \text{ " " " des Salzes } \\ a \text{ der thermische Ausdehnungcoefficient der Lösung } \} \\ \alpha \text{ " " " des Salzes } \\ u \text{ die innere Energie der Masseneinheit der Lösung } \} [C^2S^{-2}] \\ \tilde{u} \text{ " " " " " des Salzes } \\ \mathfrak{J} \text{ das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit} \\ = 41,6 \cdot 10^6 [GC^2S^{-2} \text{ cal.}] \end{array}$$

Denkt man sich Salz und Lösung, zunächst voneinander getrennt, der gleichen Druckänderung unterworfen, so werden die Volumina beider geändert. Werden sie nun miteinander in Berührung gebracht, so möge von neuem Salz aufgelöst werden, bis die Lösung wieder gesättigt ist. Dabei tritt eine weitere Volumänderung (während Druck und Temperatur

constant sind) ein. Es besteht sonach die ganze Volumänderung aus drei Theilen: der Volumänderung 1) der gesättigten Lösung; 2) des Salzes, beide voneinander getrennt gedacht; 3) der beim Auflösen als Folge molecularer Kräfte eintretenden Contraction oder Dilatation.

Die Grösse v ändert sich dabei 1) direct durch den Druck, während der Salzgehalt constant gedacht ist; 2) indirect mit dem Druck dadurch, dass der Salzgehalt sich ändert. Bezeichnet g eine durch den Procentgehalt der Lösung an Salz bestimmte Grösse, so soll geschrieben werden:

$$\frac{dv}{dp} = \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p},$$

sodass $\partial v / \partial p$ sich nur auf den ersten Theil der Aenderung bezieht. Im gleichen Sinne soll $\partial v / \partial t$, $\partial u / \partial p$ und $\partial u / \partial t$ verstanden sein.

Daher lässt sich schreiben:

$$(a) \quad \frac{\partial V}{\partial p} = r \frac{\partial v}{\partial p} + \varrho \frac{\partial q}{\partial p} + v \cdot \varepsilon q r.$$

Darin bedeutet:

ε die Masse Salz, welche sich bei constanter Temperatur in 1 g unter dem Drucke p gesättigter Lösung weiter löst durch die Druckzunahme 1. Positives ε bedeutet Zunahme der Löslichkeit mit wachsendem Druck.

$v \varepsilon q$ bedeutet die Volumänderung in Cubikcentimetern, welche das Gemisch von Salz und nahezu gesättigter Lösung erleidet, wenn die Salzmenge ε in Lösung übergeht und dadurch die Lösung gesättigt wird. Positives v bedeutet Dilatation; v ist eine reine Zahl. •

Ebenso wird:

$$(b) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = r \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho \frac{\partial q}{\partial t} + v \cdot \eta q r.$$

η bedeutet die Masse Salz, welche sich bei constantem Druck p in 1 g bei der Temperatur t gesättigter Lösung weiter löst durch die Temperatursteigerung von 1° C. Positives η bedeutet Zunahme der Löslichkeit mit steigender Temperatur [$\eta = 1^\circ \text{C.}$].

Was die innere Energie betrifft, so ist dieselbe:

beim Drucke $p \dots E = ur + \tilde{\omega} \rho$,

$$p + dp \dots E + \frac{\partial E}{\partial p} dp = \left(u + \frac{\partial u}{\partial p} dp + \frac{\partial u}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} dp \right) \cdot (r + dr) + \left(\tilde{\omega} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p} dp \right) (\rho - dr).$$

Setzt man: $\frac{\partial g}{\partial p} = \alpha \epsilon$; $\frac{\partial g}{\partial t} = \alpha \eta$, so wird:

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial p} = r \frac{\partial u}{\partial p} + \rho \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p} + \left(u - \tilde{\omega} + \alpha \frac{\partial u}{\partial g} \right) \frac{\partial r}{\partial p}, \\ \text{ebenso wird folgen:} \\ \frac{\partial E}{\partial t} = r \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \left(u - \tilde{\omega} + \alpha \frac{\partial u}{\partial g} \right) \frac{\partial r}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Schreibt man:

$$u - \tilde{\omega} + \alpha \frac{\partial u}{\partial g} = -\Im \lambda$$

und, wie oben definiert:

$$(d) \quad \frac{\partial \rho}{\partial p} = -\epsilon r = -\frac{\partial r}{\partial p}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\eta r = -\frac{\partial r}{\partial t},$$

so bedeutet:

λ die Wärmemenge, welche gebunden wird, wenn 1 g Salz von nahezu gesättigter Lösung aufgenommen und dieselbe dadurch in gesättigte übergeführt wird. Die äussere Arbeit ist dabei vernachlässigt. Positives λ bedeutet Wärmeentwicklung beim Auflösen [$\lambda = \text{cal. G}^{-1}$].

Setzt man (a), (b) und (c) in Gl. (1) und beachtet, dass nach Gl. (1):

$$p \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial p} + T \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad p \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p} + T \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

ist, so folgt: $p v \epsilon q - \Im \lambda \epsilon + T v \eta q = 0$, d. h.:

$$(1) \quad \epsilon (\Im \lambda - p v q) = T v \eta q.$$

Hierin stellt $(\lambda - (p v q / \Im)) = \mathcal{A}$ die latente Lösungswärme dar (mit Einschluss der äusseren Arbeit), wie sie beim Druck p direct beobachtet wird.

Berücksichtigt man nur Stoffe, deren Löslichkeit mit steigender Temperatur zunimmt (η positiv), so werden:

a) Stoffe, welche sich unter Wärmeverbrauch in ihrer nahezu gesättigten Lösung auflösen und dabei Contraction bewirken, durch gesteigerten Druck sich stärker lösen;

b) Stoffe, bei welchen entweder das Vorzeichen der obigen Wärmetönung oder dasjenige der Volumänderung das entgegengesetzte ist, durch Drucksteigerung theilweise ausfallen.

3) Ein Zusammenhang zwischen ε und η ergibt sich noch auf anderem Wege. Es genügt, die Gl. (a) nach t , die Gl. (b) nach p zu differenzieren, so folgt mit Rücksicht auf (d):

$$(II) \quad \varepsilon \left\{ (\alpha v - \alpha \varphi) - \frac{\partial (v \varphi)}{\partial t} \right\} = - \eta \left\{ (m v - \mu \varphi) + \frac{\partial (v \varphi)}{\partial p} \right\}.$$

Endlich folgt auf gleichem Wege aus (c):

$$(III) \quad \varepsilon \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \eta \frac{\partial \lambda}{\partial p}.$$

Man hat somit im ganzen drei Gleichungen zwischen ε und η . In jede derselben gehen andere physikalische Constanten ein. Man erhält dadurch eine Anzahl Beziehungen zwischen verschiedenen Eigenschaften der Salze und ihrer Lösungen.

Die Gl. (II) lässt noch eine andere Form zu. Definiert man die von Druck und Temperatur abhängige Grösse g als:

$$g = \frac{\text{Masse des gelösten Salzes}}{\text{Masse der Lösung}} = \frac{\alpha}{r} = g(p, t),$$

so ist:

$$v = f[p, t, g(p, t)],$$

und daher in der festgesetzten Schreibweise:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} dt.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial g}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial g} \right) = \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial g} \right),$$

und weil:

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \alpha \varepsilon; \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \alpha \eta, \quad \text{so wird:}$$

$$(II_a) \quad \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial g} \right) = \eta \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial g} \right).$$

Die früher eingeführten Grössen ergeben sich dann:

$$\alpha = \frac{r - \alpha}{r}, \quad v \varphi = v - \varphi + \alpha \frac{\partial v}{\partial g},$$

wie man leicht erkennt, wenn man dg/dr , $\partial g/\partial p$ und $\partial V/\partial p$ bildet.

4. Ich will nun die Gl. (I) anwenden auf einige Substanzen; ich wähle als erste Chlorammonium. Eine gesättigte Lösung desselben enthält 26,3 Proc. Salz¹⁾ bei 15° C.

a) λ . Nach Winkelmann²⁾ ist die Wärmemenge A_g , welche nöthig ist, um 1 g Salz bei 0° in Lösung vom Procentgehalt g überzuführen:

$$A_g = 78,26 + 0,387 g - 0,0287 g^2.$$

Winkelmann versteht dabei unter „Procentgehalt g “ das Quantum Salz, welches auf 100 Theile Wasser kommt. Für eine bei 0° C. gesättigte Lösung ist g gleich 28,40.³⁾ — Für das in Gl. (I) eingehende A soll genommen werden (was der Wahrheit ziemlich nahe kommen wird), diejenige Wärmemenge, welche 1 g Salz erfordert, wenn es sich unter Atmosphärendruck in einer Lösung, welche 27 Theile Salz auf 100 Theile Wasser enthält, auflöst. Dann ist:

$$A = A_{28} \cdot 28 - A_{27} \cdot 27 = -34,4.$$

b) Andere Constanten betreffend setze ich:

$$q = 0,6525 \text{ (specifisches Gewicht} = 1,533 \text{ bei } 3,9^\circ \text{ C.}^4)), \\ \eta = 0,0026^5), \quad T = 273.$$

c) v . Aus den, wenn nöthig, durch Interpolation erweiterten Zahlen von Gerlach für das specifische Gewicht der Lösungen bei 15° C.⁶⁾ und deren Ausdehnung durch die Wärme⁷⁾, sowie der oben angenommenen Zahl für das specifische Gewicht des festen Salzes berechne ich für den Fall, dass sich Chlorammonium bei 0° C. in nahezu gesättigter Lösung auflöst:

$$v_0 = +0,356.$$

d) Nennt man ε diejenige Salzmenge, welche sich in

1) Gerlach, Salzlösungen. Freiberg bei Engelhardt. 1859. p. 11.

2) Winkelmann, Pogg. Ann. 149. p. 25. 1873.

3) Biedermann, Chemikerkalender. Berlin. Springer. 1883.

4) Joule u. Playfair, Gmelin-Kraut, Chemie I. 2. p. 566.

5) Berechnet nach den Angaben in Biedermann, Chemikerkalender (die Zahlen scheinen aber aus nur zwei Bestimmungen bei 15° und 100° linear interpolirt zu sein).

6) Gerlach, l. c. p. 10.

7) Gerlach, l. c. p. 97.

1 g gesättigter Lösung durch die Druckerhöhung von 1 Atmosphäre weiter löst, und berücksichtigt, dass:

1 Atm. = $1036.981 [G C^{-1} S^{-2}] = 1,016 \cdot 10^6 [G C^{-1} S^{-2}]$
ist, so folgt für Chlorammonium:

$$\bar{\epsilon}.41,6.34,4 = -273.0,356.0,0026.0,6525.1,016, \\ \bar{\epsilon} = -0,000125.$$

Gesättigte Salmiaklösung müsste durch Drucksteigerung theilweise ausgefällt werden. (Bei 100 Atm. würden aus jedem Gramme Lösung 12,5 mg Salz abgeschieden.)

5. Chlornatrium. — a) λ . Aus den Interpolationsformeln von Winkelmann würde für den Eintritt von Kochsalz in nahezu gesättigte Lösung eine geringe Wärmeentwicklung folgen. Da mir dies wenig wahrscheinlich vorkam, habe ich λ direct zu bestimmen versucht und mich überzeugt, dass ebenso, wie beim Auflösen des Salzes in Wasser, Wärme verbraucht wird, wenn es von schon nahe gesättigter Lösung aufgenommen wird; λ wird aber so klein, dass mit Thermometern, die in $\frac{1}{10}^0$ getheilt sind, wie sie mir augenblicklich bloß zur Verfügung standen, nur sehr ungenau zu messen ist. Für bessere Bestimmungen müsste man verfeinerte Methoden anwenden. Ich gebe daher nur als ungefähr richtig:

$$\lambda = -2,0.$$

b) Andere Constanten betreffend, setze ich:

$$\varphi = 0,4615 \text{ (specifisches Gewicht} = 2,15 \text{ nach Kopp),} \\ \nu_i = 0,000222^1), \quad T = 273.$$

c) ν . Aus den Zahlen von Gerlach²⁾ berechnet es sich für den Fall, dass 25-procentige Lösung in 26-procentige übergeführt wird, zu:

$$\nu = -0,1770.$$

d) Daraus folgt, wenn man λ , ν und φ als constant betrachtet:

1) Berechnet aus den Angaben nach Poggiale in Hoffmann-Schädler, Tabellen für Chemiker. Berlin. Springer. 1877. p. 142.

2) Gerlach, l. c. p. 8. Eine andere Berechnung ergibt $\nu = -0,127$.

$$\bar{\varepsilon} \cdot 41,6 \cdot 2,0 = + 0,000\,222 \cdot 273 \cdot 0,4615 \cdot 0,177 \cdot 1,016,$$

$$\bar{\varepsilon} = + 0,000\,061 \text{ für } 0 \text{ Atm.}$$

$$= + 0,000\,062 \quad " \quad 100 \quad "$$

$$= + 0,000\,061 \quad " \quad 500 \quad "$$

$$= + 0,000\,033 \quad " \quad 1000 \quad "$$

$$= 0 \quad " \quad 1530 \quad "$$

Kochsalzlösung, welche bei Atmosphärendruck gesättigt ist, müsste durch Drucksteigerung noch weiteres Salz auflösen. (Bei 100 Atm. 1 g Lösung ca. 6 mg.)

Die Abhängigkeit der Grösse ε vom Druck wird grossentheils bedingt durch die Aenderung, welche ν durch denselben erleidet (cf. § 15). ε nimmt mit steigendem Druck anfangs etwas zu, bleibt dann lange fast constant und sinkt nachher rasch.

6. Alaun, schwefelsaures Natron. — Für Alaun (krystallisirt) und $\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10 \text{ aq}$ sind die Constanten:

Alaun	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10 \text{ aq}$
$\lambda = - 12^1)$	$\lambda = - 187^1)$
$\eta = 0,00494^2)$	$\eta = 0,00789^5)$
$\nu = - 0,1033^3)$	$\nu = - 0,1496^6)$
$\varphi = 0,5801^4)$	$\varphi = 0,6751^7)$
$\bar{\varepsilon} = + 0,000\,164\,8$	$\bar{\varepsilon} = + 0,000\,035\,10.$

Für beide folgt daraus Löslichkeitszunahme mit steigendem Druck.

Versuche über den Einfluss des Druckes.

7. Als ich meine Versuche anstellte, war es mir nicht bekannt, dass schon von Sorby⁸⁾ Beobachtungen vorliegen, welche, was den Einfluss der Volumänderung beim Lösen betrifft, mit den obigen theoretischen Ergebnissen in Uebereinstimmung sind. Sorby hat sich von Analogien leiten

1) Eigene Bestimmungen.

2) Hoffmann-Schädler, l. c. p. 142.

3) Daten aus Chemikerkalender, l. c. p. 146.

4) Spec. Gew. = 1,724 (Kopp).

5) Regnault, Cours de Chimie 1848. p. 457 u. Tabelle daselbst.

6) Daten in Gerlach, l. c. p. 20.

7) Spec. Gew. = 1,481 (Mohs).

8) Sorby, Proc. Roy. Soc. 12. p. 538. 1863.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXX.

lassen, indem er die Aenderung des Schmelzpunktes durch den Druck als eine ähnliche Erscheinung auffasst.

Sorby benutzte, um den Druck zu erzeugen und zu messen, die Methode, welche Bunsen angewendet hatte, um die Aenderung des Schmelzpunktes durch den Druck zu ermitteln. Seine Versuche sind bei 20° C. angestellt; die Gefässe wurden bei einer 10 bis 20° C. niedrigeren Temperatur gefüllt und die Röhren, je nach dem Wetter, in verschiedene Theile des Hauses gebracht. Es war ihm so möglich, für einige Wochen oder selbst Monate constante Druckkräfte (60 bis 100 Atmosphären) zu erhalten.

Eine zweite, ganz gleich behandelte Röhre, welche aber keinen Druck im Innern hatte, wurde daneben gestellt, sodass er den Einfluss des Druckes „mit sehr beträchtlicher Genauigkeit“ bestimmen konnte.

Sorby findet bei NH_4Cl , welches beim Lösen Dilatation zeigt, Abnahme der Löslichkeit mit steigendem Druck; umgekehrt Zunahme bei NaCl , CuSO_4 , K_2SO_4 , Kaliumferrocyanid und Kaliumferridcyanid. Diese fünf Salze lösen sich unter Contraction.

Die Art, wie Sorby verfuhr, erscheint aber sehr bedenklich, wenn man berücksichtigt, wie schwierig es ist, Lösungen herzustellen, welche bei einer bestimmten Temperatur gesättigt sind, und wenn man andererseits bedenkt, dass der Einfluss eines Druckes von 100 Atmosphären durch eine — wenn auch nur kurz andauernde — geringe Temperaturschwankung aufgehoben werden kann; z. B. findet Sorby für CuSO_4 eine Zunahme der sich lösenden Salzmenge bei Drucksteigerung von 1 bis 101 Atmosphären gleich 3,18 %; für NH_4Cl eine Abnahme um 0,64 %. Temperaturänderungen um 1,2°, resp. 2° C. werden den gleichen Effect haben.

Ausser von Sorby liegen meines Wissens nur noch von K. Möller¹⁾ Versuche über den gleichen Gegenstand vor. Seine Angaben widersprechen theilweise denen von Sorby.

8. Als Compressionsapparat benutzte ich im wesentlichen die von Mousson angegebene Vorrichtung. Ein schmiedeeiserner Block von 11,4 cm Länge und einem Quer-

1) K. Möller, Pogg. Ann. 117. p. 336. 1862.

schnitt
einem
messer
Schrau
diesem
cylindr
und He
auf den
M
vertica
Er bil
im we
gestell
D
gelegte
D
Holzei
eine e
schrau
D
worder
in Sch
Kryst
volle C
Lösun
S
einige
von L
die ab
von il
klare
welch
überg
mich
perat
Eisen
Stund
Lösun

schnitt von 6×6 cm war seiner Längsrichtung nach von einem schwach conisch sich verjüngenden Canale (Durchmesser 0,75 cm) durchsetzt. Er war unten durch eine Schraube, mit untergelegtem Kupfering, geschlossen. In diesem conischen Canal wurde der Druck erzeugt, indem ein cylindrischer Kupferbolzen in den Canal mittelst Schraube und Hebel hineingepresst wurde. Den Druck von der Schraube auf den Kupferbolzen übertrug ein Stahlstäbchen (2,2 cm lang).

Mit dem Compressionskanal communicirte ein zweiter verticaler Canal von 10 cm Länge und 0,85 cm Durchmesser. Er bildete das Reservoir für die Salzlösung. Es war so ein im wesentlichen U-förmiger Raum in dem Eisenblock hergestellt. Für die Salzlösung blieben etwa 7 cm.

Die Verschlüsse werden durch Stahlschrauben mit untergelegten Ringen von weichem Kupferblech gebildet.

Der Eisenklotz wurde, die Kanäle vertical, in einen Holzeimer gestellt; am Drehen und Umfallen war er durch eine eiserne Fassung gehindert, welche im Eimer festgeschraubt war. Er wurde allseitig mit Schnee von 0° umgeben.

Die Salzlösungen waren bei höherer Temperatur hergestellt worden und befanden sich, mindestens schon einige Tage lang, in Schnee von 0° . Sie waren in Berührung mit ausgeschiedenen Krystallen, öfters mit denselben geschüttelt worden, sodass volle Garantie dafür gegeben war, dass sich zwischen Salz und Lösungsmittel ein Gleichgewichtszustand hergestellt hatte.

Sie waren in kleinen Spritzfläschchen enthalten. In einigen Fällen wurde die Salzlösung direct durch Einblasen von Luft in den Compressionsapparat hinüber getrieben (wenn die abgeschiedene Salzmasse so fest am Boden aufsass, dass von ihr nichts mitgespült wurde), in anderen Fällen wurde klare Salzlösung in ein Fläschchen abgegossen und aus diesem, welches verkorkt in Schnee aufbewahrt wurde, in den Apparat übergefüllt. Ein Versuch wurde erst begonnen, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass die Lösung im Apparat die Temperatur des schmelzenden Schnees hatte. Die Kanäle des Eisenklotzes waren während dieser Zeit (oft waren mehrere Stunden nöthig) verkorkt, sodass sich die Concentration der Lösung nicht ändern konnte.

Die Temperatur des Raumes, in welchem die Versuche gemacht wurden, war ausserordentlich günstig. Im verflossenen Winter hielt sich dieselbe oft 3 Wochen lang auf $+1^{\circ}\text{C}$. In den kältesten Tagen des Januar und Februar sank sie bis auf 0° , nach länger andauerndem warmen Wetter stieg sie in diesen Monaten bis auf $+2,5^{\circ}$. Zur Zeit, als Versuche gemacht wurden, lag sie meist bei $+1^{\circ}\text{C}$. Ein kurzes Verweilen der Lösungen beim Ueberfüllen oder derjenigen Apparatheile, welche nicht in Schnee verwahrt werden konnten, hatte daher kein Bedenken.

Es kam mir zunächst darauf an, qualitativ durchaus sichere Resultate zu erhalten und mich ungefähr über die Grössen, welche zur Beobachtung kommen, zu orientiren. Ein Manometer war daher an dem Apparat nicht angebracht. Rechnet man den Druck, den man ausüben kann, aus der Ganghöhe der Schraube und der Länge des Hebelarmes, so ergibt sich Folgendes: Für das Durchtreiben des Kupferbolzens durch den nicht geschlossenen Apparat war ein Drehungsmoment am Hebelarme von 5 kg Gew. \times 24 cm ausreichend. Nimmt man an, dass man beim Pressen ein Drehungsmoment von 30 kg \times 24 cm ausübt, so folgt daraus ein Druck ca. 30000 Atmosphären. Eine zuverlässigere Bestimmung zeigt aber, dass man diesen Druck nicht entfernt erreicht. Ich habe den Apparat mit destillirtem Wasser gefüllt, auf den Boden seines Innenraumes Quecksilber gegossen und in dieses die zu einer feinen Capillaren ausgezogene Spitze eines Glasröhrchens tauchen lassen, welches am anderen Ende zugeschmolzen und mit ausgekochtem destillirtem Wasser gefüllt war. Es wurde dann Druck gegeben, der Apparat umgekehrt, in dieser Lage geöffnet und das in das Röhrchen getriebene Quecksilber gewogen. So fand ich — bei nicht zu starkem Pressen — Drucke von etwa 900 Atmosphären, wenn der Compressionscoefficient des Wassers gleich dem von Grassi bei wenigen Atmosphären Druck bestimmten Werth gesetzt wird. Immerhin sind das bei Wasser Volumenänderungen, wie sie eine Erwärmung von etwa 45°C . (im entgegengesetzten Sinne) hervorbringen würde.

Ma
Kochs
9.
(Na₂SC
wurden
Stück
den m
selbe
im Sch
steiger
in Sch
weilen
nach d
sichtig
und w
an der
schwa
Alaun
chen
Kryst
überg
suche
wasse
I
bei C
möcht
wahr
schlos
Salzl
Kryst
lösun
I
gebra
gelös
besti
berec
1)

Meine Versuche erstrecken sich auf Natriumsulfat, Alaun, Kochsalz, Chlorammonium.

9. Resultate bei Alaun und Natriumsulfat ($\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10 \text{ aq.}$). Aus grossen, klaren Krystallen von Alaun wurden scharfkantige Stücke ausgeschlagen. Ein gewogenes Stück wurde in einem Probirröhrchen auf 0° abgekühlt, in den mit gesättigter Lösung von 0° und durchweg auf dieselbe Temperatur abgekühlten Apparat gebracht, derselbe im Schnee stehend geschlossen und der Druck langsam gesteigert. Der Apparat wurde dann, meist horizontal liegend, in Schnee verpackt und 12—48 Stunden darin gelassen, bisweilen auch umgedreht. In den ersten Versuchen wurde nach dem Oeffnen die Lösung abgegossen, der Krystall vorsichtig herausgenommen, zwischen Fließpapier getrocknet und wieder gewogen. Der Krystall zeigte sich, namentlich an den Kanten, stark abgeschmolzen, bisweilen auf ein ganz schwaches Skelett reducirt. Die Lösung selbst war bei Alaun immer vollständig klar, frei von suspendirten Theilchen, setzte aber nach mehrstündigem Stehen in Schnee Krystalle ab. Anfangs wurde sie direct in kleine Gläschen übergossen und verkorkt aufbewahrt. In späteren Versuchen wurde sie vorher durch einen mit Schnee und Schneewasser umgebenen, bedeckten Trichter filtrirt.

Die Befürchtung, welche ich anfangs hatte, dass hierbei Konzentrationsänderungen durch Verdampfen entstehen möchten, erwies sich als unbegründet. In dem kalten und wahrscheinlich nahezu mit Wasserdampf gesättigten gut geschlossenen Beobachtungsraume zeigten dünne Schichten von Salzlösungen, die offen an der Luft lagen, erst nach Wochen Krystalle; Filtrirpapier, mit den nicht hygroskopischen Salzlösungen (z. B. NH_4Cl) getränkt, blieb Tage lang feucht.

Die Lösungen wurden nachher auf Zimmertemperatur gebracht und, nachdem die ausgeschiedenen Krystalle wieder gelöst waren, ihr specifisches Gewicht (mit Senkgläschen) bestimmt. Daraus wurde die Menge krystallisirten Salzes berechnet, welche 100 g Lösung aufgenommen haben.¹⁾

1) Die nöthigen Zahlenangaben vgl. Biedermann, l. c. p. 46.

Die Resultate sind:

Alaun.

Nr.	Versuchsdauer	Gelöst wurden	100 g Lösung haben aufgenommen	Die Lösung ist jetzt gesättigt bei ¹⁾
I	23 Stunden	0,1 g (ca)	1,1 g	+2,5° C.
II	20 "	0,117 "	1,8 "	+3,7° "
III	18 "	0,077 "	1,3 "	+2,6° "
IV	— "	0,274 "	2,9 "	+6,0° "
V ²⁾	3 "	— "	3,27 "	+6,7° "

Der Theorie nach entspräche die grösste beobachtete Löslichkeitsänderung nur einem Druck von etwa 200 Atmosphären. Es nimmt offenbar während des Versuches der Druck ab infolge der Contraction beim Auflösen.

Schwefelsaures Natron ($\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10 \text{aq}$)

Nr.	Versuchsdauer	Gelöst wurden	100 g Lösung haben aufgenommen	Die Lösung ist jetzt gesättigt bei
I	12 Stunden	— g	0,13 g	+0,2° C.
II	20 "	0,444 "	1,57 "	+2,2° "
III	19 "	0,409 "	0,92 "	+1,3° "

Der Theorie nach entspräche die grösste beobachtete Salzaufnahme einem Druck von rund 500 Atmosphären.

10. Resultate bei Chlornatrium. Die Lösung war hergestellt aus reinen Steinsalzkrystallen; in dieselbe wurde ein ausgespalteter Steinsalzkrystall gelegt. Der Apparat wurde nach dem Schliessen in Schneewasser abgespült, in eine Blechbüchse, die mit Wasser von 0° gefüllt war, gebracht und diese allseitig mit Schnee umgeben. Es sollte so jede Temperaturerniedrigung durch Austritt von Lösung aus dem Apparat vermieden werden. Die gleiche Vorsicht wurde bei einer Anzahl der schon mitgetheilten Beobachtungen gebraucht, ist aber dort für das Qualitative ohne Belang.

Bei Chlornatrium zeigte sich nämlich die eigenthümliche Erscheinung, dass auf dem Krystalle sich kleine Kryställchen abgelagert hatten, und doch hatte das Gewicht des ganzen Krystalles abgenommen.

1) Vgl. Hoffmann-Schädler, l. c. p. 142.

2) Es wurden kleine Krystalle und ein Eisenstäbchen in die Lösung gebracht; der Apparat nach dem Schliessen und Verpacken in Schnee öfters umgeschüttelt, die Lösung nach dem Öffnen filtrirt. Sie lief klar durch, setzte aber bald darauf Krystalle ab.

Diese Erscheinung, welche besonders auffällig war, wenn starker Druck angewendet wurde, und welche nur bei NaCl beobachtet wurde, erklärt sich, wenn man annimmt, dass man im Anfang diejenige Druckgrenze (ca. 1500 Atmosphären) überschritten hat, bei welcher noch Contraction stattfindet. Bei dem hohen Anfangsdruck ist Salz aus der Lösung ausgefallen. Der Druck hat, hauptsächlich wohl infolge von Undichtigkeit des Apparates nachgelassen, und es ist nun Auflösung eingetreten. Das Wasser in der Blechbüchse zeigte thatsächlich dann immer starke Chlorreaction.

In zwei Versuchen wurde deshalb der Druck nicht bis zum erreichbaren Maximum getrieben. Der Krystall zeigte sich deutlich abgerundet; kleine Kryställchen waren ihm nicht aufgelagert.

Es fand sich:

Chlornatrium.

Nr.	Versuchsdauer	Gelöst wurden	100 g Lösung haben aufgenommen
I	36 Stunden	0,053 g	0,32 g
II	28 „	0,029 „	— „

Bei Alaun sollte man die Erscheinung, dass Salz ausgefällt wird, schon bei einem relativ niedrigen Druck beobachten. Dort ist es aber wahrscheinlich dadurch verdeckt worden, dass bei abnehmendem Druck (wegen sehr grossen ϵ) die ganze äussere Schicht des Krystalles aufgelöst wird.

11. Resultate bei Chlorammonium. Durch Druckzunahme fällt das Salz theilweise aus seiner Lösung aus. Nachdem der Apparat 38 Stunden lang unter Druck geschlossen (in Wasser eingelegt) war, habe ich nach dem Oeffnen desselben und Filtriren der Lösung im bedeckten Trichter 0,046 g Krystalle von dem Filter abgehoben. Der ganze Boden des Innenraumes war mit Nadeln bedeckt. Nach den specifischen Gewichtsbestimmungen hatten 100 g Lösung 2,18 g Salz ausgeschieden. Das würde derselbe Effect sein, wie ihn eine Temperaturabnahme um etwa 10° hervorbringt.

Die Lösung war aber stark grünlich gefärbt und setzte an der Luft auch Eisenoxydhydrat ab. Die Salmiaklösung hatte Metall aufgelöst.

Um diese Verunreinigung der Lösung zu vermeiden, wurden wiederholt Versuche in der Weise gemacht, dass ein unten zugeschmolzenes Glasröhrchen in den Apparat hineingebracht wurde. Der Apparat und das Röhrchen wurden mit Lösung gefüllt, in das Röhrchen, um Uebersättigung zu vermeiden, ein kleiner Brocken des Salzes (der aus Salmiakkruste herausgeschnitten ist) gebracht und geschlossen. Schon nach etwas über einer halben Stunde ist das ganze Röhrchen mit Krystallnadeln durchwachsen. Der Versuch gelingt so sicher, dass ich ihn als Vorlesungsversuch benutzt habe. Versieht man das Röhrchen unten mit einer kleinen Oeffnung, so kann man beim Herausnehmen desselben gleich die Lösung ablaufen lassen und so die Krystalle von ihr trennen.

II. Ueber die Compressibilität von Salzen und deren Lösungen.

12. Im Folgenden theile ich einige Beobachtungszahlen und den Weg, auf welchem sie ermittelt wurden, mit. Ich werde die Zahlen im nächsten Abschnitt zu Schlüssen benutzen. Die Compressibilität der Lösungen wurde im Oersted'schen Piëzometer bestimmt. Als Gefässe dienten Dilatometer mit eingeschliffenen, calibrirten Capillarröhren. Die Lösungen wurden, nachdem die Capillarröhre, welche mit ihrem offenen Ende in Salzlösung eintauchte, aufgesetzt war, durch Kochen von Luft befreit. — Die Compressibilität des Gefässes wurde ermittelt durch Beobachtung der scheinbaren Compressibilität des destillirten Wassers in denselben. Die wahre Compressibilität desselben wurde bei 1° gleich $51 \cdot 10^{-6}$ (Einheit des Druckes die Atmosphäre) angenommen.

Der Druck wurde ermittelt durch Aenderung eines Luftvolumens. Eine oben zugeschmolzene Glasröhre tauchte mit dem offenen Ende in Quecksilber. Etwa am oberen Fünftel ihrer Länge war sie zu einer Capillare verengt. Das Quecksilber wurde immer bis zu einer Marke, die an der Capillare angebracht war, heraufgepresst. Aus dem Barometerstand, der Höhe der Wassersäule des Piëzometers über dem Quecksilber, welches das Manometer absperirt, der anfänglichen Erhebung des Quecksilbers im Manometerrohr über das äussere

Niveau
endlich
Druck
die D
kennen
die D
subtral

D
man in
gesätti
befreit
luftfre
Einflu
nicht
spalte
tende
lange
wässer
sung,
Dilate
war,
löst h
Volun
Druck
pressi
Gewi
von
bilitä

mete
erwie
dass
proc

spalt
sich
Salz
Gefä

Niveau, der Erhebung desselben bei der Compression und endlich dem Verhältniss der Luftvolumina ohne und mit Drucksteigerung ermittelt sich die letztere. Von ihr ist, um die Druckänderung, welche die Lösung erfahren hat, zu kennen, noch der Druck, welchen die im Dilatometer durch die Drucksteigerung gehobene Quecksilbersäule ausübt, zu subtrahiren.

Die Compressibilität der Salze wurde ermittelt, indem man in die Dilatometer eine bei hoher Temperatur möglichst gesättigte Lösung brachte, welche durch Kochen von Luft befreit wurde. Liess man nun erkalten, so schieden sich luftfreie Krystalle aus. Für NaCl war wegen des geringen Einflusses der Temperatur auf die Löslichkeit dies Verfahren nicht anwendbar. Es wurden deshalb in die Lösung ausgespaltene, luftfreie Stücke Steinsalz gebracht und die anhaftende Luft durch Kochen entfernt. Bei Na_2SO_4 wurde solange probirt, bis sich nur die Krystalle des zehnfach gewässerten Salzes abschieden. Die ausgekochte luftfreie Lösung, welche wasserfreies Salz abgeschieden hatte, wurde im Dilatometer, das durch Salzlösung gegen Luft abgesperrt war, solange auf ca. 33° erwärmt, bis sich wieder alles gelöst hatte. Dann liess man wieder abkühlen. Es wurde die Volumänderung des Gemenges von Salz und Lösung durch Druck bestimmt. Aus dem Volumen des Gefässes, der Compressibilität der Lösung und des Gemenges, dem specifischen Gewicht der Lösung und des festen Salzes und dem Gewicht von Lösung und Salz zusammen lässt sich die Compressibilität des Salzes berechnen.

Aber wenn es auch gelang, den Innenraum des Dilatometers bis über die Hälfte mit festem Salz auszufüllen, so erwies sich doch die Compressibilität der Salze so gering, dass die auf diesem Wege ermittelten Zahlen mit sehr grossen procentischen Fehlern behaftet sind.

Ich gebe im Folgenden die Resultate. Die erste Doppelspalte gibt die Volumina des Salzes und der Lösung, welche sich im Dilatometer befanden. Bei den Bestimmungen an Salzlösungen füllten selbstverständlich diese allein das ganze Gefäss.

Compressionscoëfficienten
(Druckeinheit 1 Atm.)

	Volum		Spec. Gewicht		Compressionscoëff.	
	des Salzes	der Lösung	des Salzes	der Lösung	(1° C.) des Salzes	der Lösung
NH ₄ Cl	7,69 C ^s	22,99 C ^s	1,533	1,073	$4,9 \cdot 10^{-6}$	$38 \cdot 10^{-6}$
Alaun	17,65	13,76	1,724	1,030	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$46 \cdot 10^{-6}$
(krystall.)						
NaCl	12,25	19,23	2,15	1,212	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$27 \cdot 10^{-6}$
Na ₂ SO ₄	19,10	11,54	1,465	1,045	$7,1 \cdot 10^{-6}$	$42,5 \cdot 10^{-6}$
+ 10 aq						

Die specifischen Gewichte der bei 1° gesättigten Lösungen gelten für die Temperatur + 1° C. Die Autoren, welchen die specifischen Gewichte der festen Salze entlehnt sind, vgl. § 4 bis 6.

III. Ueber die den Vorgang der Lösung begleitenden
Volum- und Energieänderungen.

13. Gewöhnlich tritt beim Lösen Contraction ein. Nur in wenigen von den sehr zahlreichen Beobachtungen zeigt sich eine Volumänderung im entgegengesetzten Sinne; meines Wissens ergeben nur Chlor-, Brom- und Jodammonium, ferner Chlormagnesium ($\text{MgCl}_2 + 6\text{aq}$) und Weinsäure eine Dilatation.

Die seitherigen Beobachtungen beziehen sich meist auf gewöhnliche Temperatur und immer, so viel mir bekannt, auf Atmosphärendruck. Denkt man sich die Versuchsbedingungen aber in weiteren Grenzen, was Druck und Temperatur betrifft, variirt, so kommt man zu zwei allgemeinen Resultaten.

14. Um die Aenderung des Contractionscoëfficienten mit dem Druck zu berechnen, gilt Folgendes:

Das Volum, welches eine Lösung bei gegebenem Druck und gegebener Temperatur einnimmt, wird unabhängig sein von dem Wege, auf welchem die Lösung entsteht. Man kann daher zu demselben Endvolumen auf verschiedenen Wegen gelangen. Wir wählen zwei solche.

Weg A. Es seien gegeben ϵ gr Salz, r gr nicht gesättigter Lösung, beide beim Druck p . Sie nehmen ein das Vo-

lum $V_0 = rv + \epsilon q$. Man lasse Salz und Lösung in Berührung, bis vollständige Auflösung erreicht ist. Dann ist das Volum nach der Lösung $V_1 = rv + \epsilon q + v \epsilon q$. Nun werde der Druck um dp erhöht, so wird das Volum $V_2 = V_1 - \bar{m} V_1 \cdot dp$, wenn \bar{m} die cubische Compressibilität der Lösung, nachdem sie noch die Salzmenge ϵ aufgenommen hat, bedeutet.

Weg B. Man comprimire Salz und Lösung voneinander getrennt durch die Drucksteigerung dp und lasse dann unter dem Druck $p + dp$ das Salz sich lösen. Dann wird:

$$V_2 = rv + \epsilon q - (mrv + \mu \epsilon q) dp + \left(v + \frac{\partial v}{\partial p} dp \right) (\epsilon q - \mu \epsilon q dp).$$

Daher:

$$\bar{m}(rv + \epsilon q + v \epsilon q) = mrv + \mu \epsilon q + \mu v \epsilon q - \frac{\partial v}{\partial p} \epsilon q, \quad \text{oder:}$$

$$(IV) \quad - \frac{\partial v}{\partial p} = (\bar{m} - m) \frac{rv}{\epsilon q} + (\bar{m} - \mu)(1 + v).$$

15. Das Vorzeichen von $\partial v / \partial p$ hängt davon ab, ob:

$$\bar{m}(rv + \epsilon q + v \epsilon q) \gtrless (mrv + \mu \epsilon q)$$

ist, d. h. ob die Volumänderung einer Lösung durch Druck gleich der Summe der Volumänderungen der Componenten ist.

Für die von mir untersuchten vier gesättigten Lösungen ist nun immer die Summe der Compressionen der Componenten grösser als die der Mischung, und zwar ist der Unterschied so erheblich, dass man dem Resultate noch eine andere Fassung geben kann, welche es wahrscheinlich macht, dass es ein allgemein gültiges sei.

In je 100 g der gesättigten Lösungen der genannten vier Salze ist bei:

	NH ₄ Cl	NaCl	Na ₂ SO ₄	Alaun
Volum des Wassers . . .	74	74	89,16	96,25
„ des Salzes . . .	17	12,1	7,40	2,175.

Auf Grund dieser Zahlen und der angegebenen Compressionscoefficienten ergibt sich Folgendes. Denkt man sich:

a) Das Wasser gehe in die Lösung ein mit dem Compressionscoefficienten, wie es ihm im isolirten Zustande zukommt, so müsste man den Salzen die folgenden negativen Compressionscoefficienten beilegen, d. h. sie müssten sich bei der Compression ausdehnen.

NH_4Cl	NaCl	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + 10 \text{ aq}$	Alaun
$- 18,6 \cdot 10^{-6}$	$- 146,8 \cdot 10^{-6}$	$- 59,9 \cdot 10^{-6}$	$- 175 \cdot 10^{-6}$

Diese Annahme erscheint nicht zulässig.

b) Das Salz gehe mit seinem oben gefundenen Compressionscoefficienten in die Lösung, so müsste man dem Wasser beilegen die Compressionscoefficienten:

in der Lösung von	NH_4Cl	NaCl	Na_2SO_4	Alaun
	$45,6 \cdot 10^{-6}$	$31,2 \cdot 10^{-6}$	$45,4 \cdot 10^{-6}$	$47 \cdot 10^{-6}$

c) Setzt man das Salz in der Lösung als gar nicht compressibel voraus, so müsste man dem Wasser zuertheilen die Compressionscoefficienten:

in der Lösung von	NH_4Cl	NaCl	Na_2SO_4	Alaun
	$46,7 \cdot 10^{-6}$	$31,4 \cdot 10^{-6}$	$46,0 \cdot 10^{-6}$	$47 \cdot 10^{-6}$

Im reinen Zustande hat das Wasser bei der gleichen Temperatur die Compressibilität $51 \cdot 10^{-6}$. Man kann daher das Resultat auch aussprechen in der Form: Das Wasser der Lösung ist durch das in ihm gelöste Salz starrer geworden. Dies gilt, gleichgültig ob beim Lösen Contraction oder Dilatation eintritt. Auch die Compressionscoefficienten, welche über andere Salzlösungen vorliegen, fügen sich in diese Form.

Daraus folgt aber, dass $\partial v / \partial p$ positiv ist, d. h. bei grösseren Druckkräften müssen die beim Lösen der Salze eintretenden Contractionen abnehmen, die Dilatationen zunehmen, so dass bei höheren Drucken vielleicht alle Volumänderungen in der seither als die Ausnahme betrachteten Dilatation bestehen.

Setzt man $\partial v / \partial p$ als constant voraus, so ergeben sich die Drucke, bei welchen die Dilatation beginnt, als keineswegs besonders hoch; sie betragen z. B. für NaCl 1530, für schwefelsaures Natron 2200, für Alaun sogar nur 587 Atmosphären. Die Chlornatriumlösung hätte bei diesem Druck ihr Volum nur soviel verkleinert, als sie es durch Erwärmen von 0 auf 65°C vergrössert.

Chlorammonium würde umgekehrt von seiner nahezu gesättigten Lösung ohne Dilatation aufgenommen werden, wenn man sie einem Zug von 7850 Atmosphären aussetzen könnte.

16. In ähnlicher Weise hängt die Volumänderung von

der Temperatur ab. Versteht man unter \bar{a}, a, α die thermischen Ausdehnungscoefficienten der resp. gesättigten, nicht vollständig gesättigten Lösung und des festen Salzes, so wird:

$$(V) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = (\bar{a} - a) \frac{rv}{\epsilon q} + (\bar{a} - \alpha)(1 - v).$$

Nach allen Beobachtungen, welche über die Wärmeausdehnung von wässerigen Salzlösungen vorliegen, ist, wenigstens für die leichter löslichen Salze und Temperaturen bis zu etwa 50° C. $\bar{a} > a > \alpha$; daraus folgt, dass $\partial v / \partial t$ positiv ist; d. h. die Dilatation nimmt mit steigender Temperatur zu, die Contraction ab. Mit steigender Temperatur streben also, ebenso wie mit wachsendem Druck, alle Volumänderungen, welche die Auflösung von Salzen begleiten, der Dilatation zu. Der Werth von $\partial v / \partial t$ ist dabei an gewisse Grenzen gebunden.

Die Gleichungen (I) und (II) ergeben nämlich combinirt:

$$\mathcal{A} = -T v q \frac{av - \alpha q - v \alpha q - q \frac{\partial v}{\partial t}}{mv - \mu q + v \mu q + q \frac{\partial v}{\partial p}},$$

$v \alpha q$ und $v \mu q$ sind die Producte dreier echten und meist sehr kleinen Brüche; sie können, wie die numerische Rechnung zeigt, vernachlässigt werden; $av - \alpha q$ und $mv - \mu q$ sind immer positiv; $\partial v / \partial p$ ist, soweit Erfahrungen vorliegen, positiv; \mathcal{A} ist nach sämmtlichen, sehr zahlreichen Beobachtungen, negativ; daraus folgt:

Ist v positiv (Dilatation), so muss $\partial v / \partial t < a \frac{v}{q} - \alpha$ sein;

Ist v negativ (Contraction), „ „ „ $\partial v / \partial t > a \frac{v}{q} - \alpha$ „ ;

für $v = 0$ wird daher $\partial v / \partial t = a \frac{v}{q} - \alpha$ „ .

17. Zu beachtenswerthen Schlüssen führt endlich die Gleichung (III):

$$\epsilon \frac{\partial \lambda}{\partial t} = v \frac{\partial \lambda}{\partial p}.$$

Mit (I) combinirt gibt sie:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = \frac{T q}{\mathcal{A}} \cdot v \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

Setzt man \mathcal{A} , worauf alle seitherigen Beobachtungen

hinweisen, negativ voraus, so folgt, dass bei allen Salzen, welche sich unter Contraction lösen, λ sich mit steigendem Druck und steigender Temperatur im gleichen Sinne ändert. Bei höherer Temperatur scheint λ meist abzunehmen (z. B. für NaCl, KCl, KNO₃, (NH₄) NO₃ cfr. Winkelmann l. c.), also müsste es auch mit steigendem Druck sich verkleinern. Unter der gleichzeitigen Einwirkung von grossem Druck und hoher Temperatur wird also λ rasch abnehmen. Es wäre denkbar, dass die Lösung eines festen Körpers in einem über seine kritische Temperatur erhitzten Lösungsmittel einträte, sobald $\lambda = 0$ ist.

Da λ , r , ρ , g , $\partial v / \partial g$ derselben linearen partiellen Differentialgleichung genügen, so müssen sie Functionen voneinander sein, d. h. durch je eine der Grössen müssen die anderen in der Weise bestimmt sein, dass Druck und Temperatur nicht mehr explicite auftreten. Geht man daher von einem Salzgehalt g zu einem anderen g' über, welcher letzterer aber verschiedenen Werthepaaren p , t zugehört, so kommt man doch zu demselben λ' ; die Wärmemenge $\lambda' - \lambda$ ist also nur abhängig von der Aenderung der Concentration, gleichgültig wie dieselbe hervorgebracht wird.

Die in § 16 und 17 gezogenen Schlüsse gelten selbstverständlich nur für den speciellen Fall, dass ein fester Stoff von seiner nahezu gesättigten Lösung aufgenommen wird. $\partial v / \partial t$ scheint bis zu etwa 50° C. immer positiv zu sein; $\partial v / \partial p$ dagegen besteht aus einem positiven und einem negativen Gliede. In den vier von mir untersuchten Fällen ist das positive Glied zwei- bis dreimal grösser als das negative. Für Lösungen, welche in der Nähe des Sättigungspunktes nur wenig die Compressibilität mit wachsender Concentration ändern, könnte es negativ werden. Es müsste negativ sein, falls der Compressionscoefficient mit wachsendem Salzgehalt wieder zunähme (von dem wenig wahrscheinlichen Falle, dass $\bar{m} < \mu$ ist, abgesehen). Ob solche Flüssigkeiten existiren, darüber können nur weitere Beobachtungen entscheiden; ebenso wie über die Frage, ob ähnliche Beziehungen auch für nicht gesättigte Lösungen bestehen.

18. Um einen Ueberblick zu geben über die Grössen

der zuletzt besprochenen Constanten, namentlich über den Einfluss, welchen sie für die aus Gl. (VI) abgeleitete Folgerung haben, mögen dieselben ausführlich wenigstens für eine Substanz angeführt werden. Ich benutze sie gleichzeitig, um auch nach Gl. (II) ϵ für NaCl auszurechnen.

Chlornatrium.

a) Ich setze:

$$q = 0,4615 \text{ (spec. Gew. = 2,15 nach Kopp),}$$

$$\alpha = 0,0001158^1),$$

$$a = 0,00037^2),$$

$$v = 0,8252^3),$$

$$\eta = 0,000222^4),$$

$$m = 26 \cdot 10^{-6} \cdot 1036^{-1} \cdot 981^{-1} \}^5),$$

$$\mu = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 1036^{-1} \cdot 981^{-1} \}^5).$$

b) $\partial v / \partial t$. Nach den Ausdehnungscoefficienten von Gerlach für die Salzlösungen und von Fizeau für das feste Salz berechnet sich für nahezu gesättigte Lösung:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = +0,00102,$$

d. h. die Contraction beim Lösen nimmt ab mit steigender Temperatur.

c) $\partial v / \partial p$. Aus den angegebenen Compressionscoefficienten folgt unter der Annahme, dass die Compressibilität sich zwischen gesättigter Lösung und reinem Wasser proportional dem Salzgehalt ändert:

$$\partial v / \partial p = +114,9 \cdot 10^{-6} \cdot 1036^{-1} \cdot 981^{-1}.$$

Die Contraction nimmt ab mit steigendem Druck. Bei ungefähr 1500 Atmosph. wäre sie gleich Null (vgl. p. 268).

d) Die einzelnen Glieder sind demnach:

1) Fizeau, Compt. rend. 64. p. 771. 1867. Berechnet für 0° C. aus den dortigen Angaben.

2) Gerlach, l. c. p. 93.

3) Vgl. p. 266.

4) Berechnet aus den Angaben nach Poggiale in Hoffmann-Schädler, Tabellen für Chemiker. Berlin. Springer, 1877. p. 142.

5) Vgl. p. 266.

$$\begin{aligned}
 -\varphi \partial v / \partial t &= -47,1 \cdot 10^{-5} \\
 -v \partial \varphi / \partial t &= +0,9. \quad " \\
 av &= +30,5. \quad " \\
 -a\varphi &= -5,4. \quad " \\
 \hline
 &= -21,1 \cdot 10^{-5} \\
 mv &= +21,46 \cdot 10^{-6} \cdot 1036^{-1} \cdot 981^{-1} \\
 -\mu\varphi &= -1,86. \quad " \quad " \quad " \\
 v \frac{\partial \varphi}{\partial p} = -v\mu\varphi &= +0,59. \quad " \quad " \quad " \\
 +\varphi \partial v / \partial p &= +53,08. \quad " \quad " \quad " \\
 \hline
 &= +73,27 \cdot 10^{-6} \cdot 1036^{-1} \cdot 981^{-1}.
 \end{aligned}$$

Daher wird:

$$\begin{aligned}
 -21,1 \cdot \bar{\varepsilon} &= -0,000\,222 \cdot 73,27 \cdot 10^{-1} \\
 \bar{\varepsilon} &= +0,000\,077.
 \end{aligned}$$

Es findet sich vom gleichen Vorzeichen, wie aus Gl. (I) folgt und in leidlicher Uebereinstimmung mit dem dort gefundenen Werthe. Man muss beachten, dass λ wegen seiner Kleinheit nicht genau bestimmt ist, und dass die für die Berechnung von $\partial v / \partial p$ gemachte Annahme einer mit dem Salzgehalt proportionalen Aenderung des Compressionscoëfficienten nicht streng richtig sein wird.

IV. Ist die thermische Löslichkeitsänderung zu erklären durch eine Aenderung der Molecularkräfte oder durch einen specifischen Einfluss der Wärme?

19. Die Löslichkeit der meisten festen Stoffe ändert sich mit der Temperatur; gewöhnlich steigt sie mit zunehmender Temperatur. Man kann sich dafür zwei Ursachen denken: 1) Die Molecularkräfte ändern sich infolge der durch Wärmeausdehnung geänderten Entfernung der Theilchen. 2) Die Löslichkeitsänderung kann ein specifischer Einfluss der Wärme sein. Da nun in den meisten Fällen Drucksteigerung die Löslichkeit erhöht, so wird eine Salzlösung, welche bei gewöhnlichem Druck gesättigt ist, bei Volumverkleinerung von neuem Salz aufzulösen im Stande sein; bei Dilatation würde sie übersättigt werden. Sofern sich also die Molecularkräfte mit der Entfernung der Theilchen ändern, wird man jedenfalls qualitativ richtig schliessen,

dass
tion
sung
kräft
ihnen
dass d
durch
woge
Beweg
keine
ändert

M
Volum
Salz-
änder
Beträ
änder
ferne
sich b
keitsä
Theil
derer
ist.

für

für

für

für

Salze
die th
als
1,107

An

dass bei allen Salzen, welche sich unter Contraction lösen, durch Erwärmung einer gesättigten Lösung Salz ausfallen müsste, wenn nur die Molecularkräfte die Löslichkeit bedingten. Wenn daher bei ihnen das Entgegengesetzte beobachtet wird, so folgt daraus, dass der Einfluss der molecularen Anziehungskräfte durch den specifischen Einfluss der Wärme überwogen wird. Ob der letztere nur in einer Aenderung des Bewegungszustandes besteht, oder ob die Wärme (auch wenn keine Volumänderung zugelassen wird) die Anziehungskräfte ändert, bleibt damit unentschieden.

Man kann sich natürlich vorstellen, dass eine thermische Volumänderung in anderer Weise die relative Lagerung der Salz- und Wassertheilchen ändert als die gleiche Volumänderung, wenn sie durch Compression hervorgebracht ist. Betrachtet man aber thermische und mechanische Volumänderung für diejenigen Kräfte, welche nur von der Entfernung der Theilchen abhängen, als gleichwerthig, so lässt sich berechnen, welcher Antheil bei der thermischen Löslichkeitsänderung einerseits dem nur vom Abstand abhängigen Theile der Molecularkräfte zufällt, und welcher Antheil andererseits als specifischer Einfluss der Wärme zu betrachten ist. Auf diese Weise ergibt sich:

für Alaun: Zunahme der Löslichkeit durch Wärme allein
 $= 1,107 \times \text{wirkliche Zunahme der Löslichkeit,}$

für Na_2SO_4 : Zunahme der Löslichkeit durch Wärme allein
 $= 1,016 \times \text{wirkliche Zunahme der Löslichkeit,}$

für NaCl : Zunahme der Löslichkeit durch Wärme allein
 $= 4,8 \times \text{wirkliche Zunahme der Löslichkeit,}$

für NH_4Cl : Zunahme der Löslichkeit durch Wärme allein
 $= 0,596 \times \text{wirkliche Zunahme der Löslichkeit.}$

Wären also die Molecularkräfte bei den drei ersten Salzen nicht dem Einfluss der Wärme hinderlich, so würde die thermische Löslichkeitsänderung grösser beobachtet werden, als man sie thatsächlich findet, im Verhältniss von resp. 1,107; 1,016; 4,8. Bei Chlornatrium hebt sich die Löslich-

keitsabnahme, welche die Molecularkräfte herbeizuführen streben, fast auf mit der Löslichkeitszunahme, welche die Wärme allein bewirken würde. Bei Chlorammonium wirken beide Einflüsse im gleichen Sinn. Die Molecularkräfte tragen hier zur factisch beobachteten Löslichkeitszunahme etwa 40 Procent bei.

IV. Ueber die elliptische Polarisation im Quarz; von B. Hecht.

(Hierzu Taf. III Fig. 8.)

In einer früheren Arbeit¹⁾ versuchte ich in einigen wenigen Richtungen die elliptische Polarisation im Quarz möglichst genau zu bestimmen, indem mich dabei die Hoffnung leitete, dass die auf diese Weise gewonnenen Resultate eventuell zu einer Entscheidung zwischen verschiedenen Gruppen von Theorien der elliptischen Polarisation in Krystallen führen könnten. Zu diesem Zwecke wurden Platten, deren Normalen gegen die optische Axe geneigt waren, geschliffen und nur bei senkrechtem Durchgang des Lichtes beobachtet. Bei der angewendeten Methode, die am angeführten Orte beschrieben ist, war es nicht nöthig, den Hauptschnitt der Platte zu bestimmen; die Polarisationsprismen und der Compensator sind nur gegen einander und nicht gegen die Einfallsebene zu orientiren. Bei jeder Beobachtung war dann nur ein Gangunterschied mittelst des Compensators zu messen und ein Drehungswinkel des Polarisators zu bestimmen. Da beides gleichzeitig geschehen musste, so wurde früher ein Soleil'scher Compensator gewählt, da sich bei diesem beide Einstellungen mit annähernd gleicher Genauigkeit machen lassen, während bei dem Babinet'schen Compensator der Gangunterschied sich genauer messen lässt, der Drehungswinkel des Polarisators aber nur sehr ungenau zu bestimmen ist. Die Art der Einstellung bei dem Soleil'schen Compensator (die dem Beobachter immerhin einige Willkür lässt)

1) B. Hecht, Wied. Ann. 20. p. 426—443. 1883.

und der Umstand, dass die senkrechte Stellung der Platte zu der Visirrichtung nicht controlirt werden konnte, mögen es verursacht haben, dass die früheren Beobachtungen keine befriedigenden Resultate lieferten.

Ich habe nun im hiesigen mineralogischen Institut mit denselben Platten nochmals Versuche angestellt nach einer Methode, die auf demselben Grundgedanken, wie die frühere beruht, aber in einigen Einzelheiten von derselben abweicht. Um Wiederholungen zu vermeiden, sollen von den Betrachtungen der früheren Arbeit, welche auch für die vorliegende Gültigkeit haben, nur die Resultate angeführt werden.

Tritt in eine Quarzplatte, deren Normale mit der optischen Axe nicht zusammenfällt, in der Richtung der Normalen linear polarisirtes Licht ein, so wird dasselbe in zwei elliptisch polarisirte Lichtstrahlen zerlegt, und zwar liegen die Hauptaxen der Schwingungsellipsen in dem Hauptschnitt der Platte und senkrecht dazu. Das Verhältniss der letzteren Axe zu der in dem Hauptschnitt liegenden Axe sei k_1 für den rechts herum rotirenden und $k_2 = 1/k_1$, für den links herum rotirenden Strahl. Die Phasenverzögerungen für die beiden Strahlen seien r , resp. l .

Nach dem Durchgang durch den Krystall setzt sich das Licht wieder zu einem elliptisch polarisirten Strahle zusammen, dessen Schwingungszustand durch folgende Gleichungen dargestellt werden möge:

$$u' = a \cos r \quad \parallel U' \quad v' = ae \sin r. \quad \parallel V'.$$

Die Axe U' bilde mit der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes L den Winkel γ^1 , und es sei:

$$(1) \quad k_1 - k_2 = 2q \quad k_1 + k_2 = 2s \\ \frac{1}{s} \operatorname{tg} \frac{l-r}{2} = \operatorname{tg} q,$$

so gilt folgende Gleichung, die l. c. p. 431—433 abgeleitet ist:

$$(2) \quad q^2 = e^2 \frac{\cos^2 (q + \gamma)}{\sin^2 q} + \frac{\sin^2 (q + \gamma)}{e^2 \sin^2 q}.$$

1) Die Fig. 8 gibt die Schnittlinien der Ebenen mit der Oberfläche der Quarzplatte und ist so gezeichnet, wie man sie von der Lichtquelle aus sehen würde.

Hierin sind q und φ die zu berechnenden Constanten der Krystallplatte, während γ und ϵ durch die Beobachtung gefunden werden sollen.

Tritt nun das Licht in einen Compensator, dessen Hauptschnitte U'' und V'' sind, und bezeichnet man den Winkel $U'OU''$ mit w und die Phasendifferenz, die durch den Compensator hervorgerufen wird, mit Δ , so ist der Schwingungszustand des aus dem Compensator tretenden Lichtes dargestellt durch:

$$u'' = a \cos w \cos \tau - a e \sin w \sin \tau \quad \parallel U''$$

$$v'' = a \sin w \cos (\tau + \Delta) + a e \cos w \sin (\tau + \Delta) \quad \parallel V''.$$

Lässt man dann das Licht durch eine aus vier Theilen bestehende Quarzplatte, von denen zwei die Polarisationsebene um den Winkel δ rechts herum, zwei um denselben Winkel links herum drehen, und darauf durch einen Analysator, dessen Polarisationsebene A mit U'' den Winkel ψ bildet, gehen, so erhält man für das durch die rechts drehenden Platten gegangene Licht:

$$u_r = u'' \cos (\psi - \delta) + v'' \sin (\psi - \delta) \quad \parallel A$$

und für das durch die links drehenden Platten gegangene Licht:

$$u_l = u'' \cos (\psi + \delta) + v'' \sin (\psi + \delta). \quad \parallel A.$$

Es ist also:

$$u_r = a [\cos (\psi - \delta) \cos w + \sin (\psi - \delta) \{ \sin w \cos \Delta + e \cos w \sin \Delta \}] \cos \tau - a [e \cos (\psi - \delta) \sin w + \sin (\psi - \delta) \{ \sin w \sin \Delta - e \cos w \cos \Delta \}] \sin \tau.$$

Hieraus ergibt sich die Intensität:

$$A_r = a^2 \cos^2 (\psi - \delta) [\cos^2 w + e^2 \sin^2 w] + a^2 \sin^2 (\psi - \delta) [\sin^2 w + e^2 \cos^2 w] + a^2 \sin 2 (\psi - \delta) [(1 - e^2) \sin w \cos w \cos \Delta + e \sin \Delta].$$

Analog:

$$A_l = a^2 \cos^2 (\psi + \delta) [\cos^2 w + e^2 \sin^2 w] + a^2 \sin^2 (\psi + \delta) [\sin^2 w + e^2 \cos^2 w] + a^2 \sin 2 (\psi + \delta) [(1 - e^2) \sin w \cos w \cos \Delta + e \sin \Delta].$$

Als Bedingung dafür, dass $A_r = A_l$, dass also alle Theile der Quarzplatte gleich hell erscheinen, erhält man:

$$(3) \quad 0 = \sin 2\psi \sin 2\delta (1 - e^2) \cos 2w - \cos 2\psi \sin 2\delta \\ [(1 - e^2) \sin w \cos w \cos A + e \sin A].$$

Die Dicke der vierfachen Quarzplatte sei so gewählt, dass $\sin 2\delta$ nicht gleich Null ist. Macht man dann $\psi = \pi/4$, also $\cos 2\psi = 0$, so ist:

$$(1 - e^2) \cos 2w = 0.$$

Wäre der Factor $1 - e^2$ gleich Null, also das aus der zu beobachtenden Quarzplatte tretende Licht circular polarisirt, so würde die Gleichung (2) ergeben:

$$q^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}.$$

Diese Relation zwischen k_1 , k_2 und $l - r$ kann nur für bestimmte Platten erfüllt sein, und da man $l - r$ durch passende Wahl der Dicke der Platte beliebig abändern kann, so lässt sich dieser Fall immer vermeiden.

Im allgemeinen wird also A_r nur gleich A_l , wenn $\cos 2w = 0$ ist. Hieraus folgt $w = \pm \pi/4 \pm \pi/2$. Also fällt eine der Hauptaxen der Ellipsen mit A zusammen, und es soll diese jetzt mit U' bezeichnet werden, indem vorher die Wahl von U' noch willkürlich war. Es ist dann $w = \pi/4$, und der Winkel $\gamma = U'OL$ ist gleich dem Winkel AOL , der wie unten angegeben werden wird, gemessen werden kann.

Für $w = \pi/4$ wird:

$$(4) \quad A_r = A_l = a^2 \frac{1 + e^2}{2} + a^2 \cos 2\delta \left[\frac{1 - e^2}{2} \cos A + e \sin A \right].$$

Wählt man die Dicke des vierfachen Quarzes so, dass $\cos 2\delta = 0$ ist, was allerdings immer nur für eine Farbe der Fall sein kann, so ergibt sich:

$$A_r = A_l = a^2 \frac{1 + e^2}{2}.$$

Also ist dann die Intensität des Lichtes nach dem Durchgang durch den vierfachen Quarz und den Analysator unabhängig von der Grösse der Phasendifferenz A , welche im Compensator den Lichtstrahlen ertheilt wird, und man kann auch bei Benutzung des Babinet'schen Compensators durch Drehung des Polarisators allein die Intensität in den vier Feldern der Quarzplatte gleich machen. Ist dieses erreicht, so muss, wie oben gezeigt, U' mit A zusammenfallen.

Entfernt man den vierfachen Quarz, so ergibt sich die Intensität A des aus dem Analysator tretenden Lichtes, indem man in Gl. (4) $\delta = 0$ setzt:

$$A = a^2 \left[\cos^2 \frac{d}{2} + e^2 \sin^2 \frac{d}{2} + e \sin d \right].$$

Verschiebt man den beweglichen Quarzkeil so, dass an einer durch ein Andreaskreuz fixirten Stelle im Compensator der dunkle Streifen liegt, so ist für diese Stelle:

$$e^2 \sin^2 \frac{d}{2} + e \sin d \cos^2 \frac{d}{2} = 0,$$

also:

$$e = -\operatorname{ctg} \frac{d}{2}.$$

Da nun A durch die Verschiebung des Quarzkeiles gemessen werden kann, so sind für die Bestimmung von γ und e zwei gesonderte Einstellungsobjecte gegeben.

Bestimmt man diese Grössen für dieselbe Quarzplatte in zwei verschiedenen Lagen, indem man diese Platte in ihrer Ebene dreht, so erhält man zwei Gleichungen:

$$q^2 = e^2 \frac{\cos^2(\varphi + \gamma)}{\sin^2 \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi + \gamma)}{e^2 \sin^2 \varphi},$$

$$q^2 = e_1^2 \frac{\cos^2(\varphi + \gamma_1)}{\sin^2 \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi + \gamma_1)}{e_1^2 \sin^2 \varphi},$$

welche zur Bestimmung von q^2 und $\operatorname{ctg} \varphi$ genügen. Nur in dem Falle genügen sie nicht, wenn:

$$e^2 \cos^2 \gamma + \frac{1}{e^2} \sin^2 \gamma = e_1^2 \cos^2 \gamma_1 + \frac{1}{e_1^2} \sin^2 \gamma_1,$$

$$\left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \sin 2\gamma = \left(e_1^2 - \frac{1}{e_1^2} \right) \sin 2\gamma_1,$$

$$e^2 \sin^2 \gamma + \frac{1}{e^2} \cos^2 \gamma = e_1^2 \sin^2 \gamma_1 + \frac{1}{e_1^2} \cos^2 \gamma_1$$

ist. Durch Subtraction der ersten und dritten Gleichung erhält man:

$$\left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \cos 2\gamma = \left(e_1^2 - \frac{1}{e_1^2} \right) \cos 2\gamma_1.$$

Dividirt man diese Gleichung in die zweite der obigen Bedingungsgleichungen, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\gamma_1.$$

In der angeführten Arbeit p. 435 ist aber gezeigt¹⁾, dass dies im allgemeinen nur eintreten kann, wenn die Platte in ihrer Ebene um ein Vielfaches von $\pi/2$ gedreht ist. Man kann also durch Drehung der Platte in ihrer Ebene sich eine Reihe von Gleichungen zur Bestimmung der Grössen q^2 und $\text{ctg } \varphi$ verschaffen und daraus dann nach (1) k_2 und $l - r$ bestimmen.

An derselben Stelle ist gezeigt, dass, wenn sich für eine Stellung der Platte die Werthe γ und e ergeben, dann auch das Werthe paar $\gamma' = \gamma + \pi/2$ und $e' = -1/e$ für dieselbe Stellung sich ergeben muss.

Die Beobachtungen wurden mit einem von R. Fuess construirten Spectrometer angestellt, auf dessen Theilkreis mit Hülfe der Nonien halbe Minuten abgelesen werden konnten. In dem vorderen Brennpunkte der Collimatorlinse befindet sich ein Diaphragma mit einem rechtwinkligen Fadenkreuz F_1 , und hinter der Linse ist ein Polarisationsprisma P mit geraden Endflächen angebracht; die Drehungen desselben können an einem Theilkreise bis auf ganze Minuten abgelesen werden. Zwischen Objectiv- und Ocularlinse des Beobachtungsfernrohres befindet sich ein Babinet'scher Compensator C , über dessen feste Platte ein Andreaskreuz F_2 gespannt ist; F_2 liegt in dem Brennpunkte der Objectivlinse. In dem Verbindungsstück zwischen C und der Ocularlinse ist eine seitlich leicht verschiebbare Hülse angebracht, welche eine vierfache Quarzplatte Q von 2,08 mm Dicke²⁾ enthält, bei welcher die Grenzflächen der einzelnen Theile 45° mit der Verticallinie bilden. Mit Q verbunden ist eine Linse, welche bewirkt, dass man nach dem Einschalten der Hülse die Quarzplatte deutlich sieht, wenn man vorher F_2 deutlich

1) An dieser Stelle ist durch Versehen eine falsche Formel angeführt. Es muss Z. 11 v. u. heissen:

$$\text{tg } 2\gamma' = - \frac{\sin 2\varphi + q^2 \sin^2 \varphi \sin 4\alpha}{\cos 2\varphi - q^2 \sin^2 \varphi \cos 4\alpha}.$$

2) Da für die Linie D die Drehung der Polarisationsebene durch eine Quarzplatte von 1 mm Dicke, ca. $21,7^\circ$ beträgt, so ist sie für obige Platte ca. 45° . Also ist $\cos 2\delta$ nahezu gleich Null.

gesehen hat. Hinter der Ocularlinse befindet sich ein mit einem Theilkreise, welcher Minuten abzulesen gestattet, versehener Analysator.

Die Anordnung der Versuche war folgende. Nachdem die Fernrohre ohne die Polarisationsprismen justirt waren, wurde P hinzugefügt. Es zeigte sich, dass bei der Drehung von P das Bild von F_1 um F_2 einen kleinen Kreis beschrieb. Der Durchmesser dieses Kreises wurde mittelst einer Mikrometerschraube gemessen, welche bei einer ganzen Umdrehung das Beobachtungsfernrohr um 13 Minuten verschob, und deren Trommel in 100 Theile getheilt war. Die Ablenkung des Bildes von F_1 betrug 1,80 Minuten, und zwar fand sie nach oben, resp. unten statt, wenn P auf $101,5^\circ$, resp. $281,5^\circ$, nach der Seite, wenn P auf $11,5^\circ$, resp. $191,5^\circ$ stand. Kam es in der Folge bei einer Einstellung auf die richtige Höhe des Bildes von F_1 an, so wurde P auf $11,5^\circ$ gestellt. Sollte dagegen das Bild nicht nach der Seite abgelenkt sein, so wurde P auf $101,5^\circ$ gestellt.

Fügte man den Analysator hinzu, so zeigten sich im Compensator C die farbigen Streifen. Um die Hauptschnitte von C zu bestimmen, wurden A und P abwechselnd solange gedreht, bis das ganze Gesichtsfeld dunkel war. Dieses kann nur eintreten, wenn die Polarisations Ebenen von A und P je einem Hauptschnitt von C parallel sind, und wenn in C selbst die Hauptschnitte der beiden Quarzkeile zusammenfallen. Das letztere konnte durch eine im Compensator angebrachte Schraube bewirkt werden, durch welche der bewegliche Quarzkeil in seiner Ebene gedreht wird. An dem Compensator war auch der feste Quarzkeil in seiner Ebene drehbar. Da er aber mit dem Andreaskreuz fest verbunden ist, so wurde diese Drehung nicht benutzt. Durch dieselbe ist es indessen ermöglicht, die Hauptschnitte von C parallel und senkrecht zur Drehungsaxe des Spectrometers zu stellen.

Als Mittel aus je vier Beobachtungen in den acht möglichen verschiedenen Stellungen von P und A zu einander wurde gefunden, dass die Polarisations Ebene von P und A senkrecht zu einander und parallel zu den Hauptschnitten

von C
Darauf
rend d
A
Axe d
gestell
beobac
tomet
Winkel
Ebene
das Be
an der
konnte
richtig
Durch
von F
hierbe
abgele
um w
seine
die Q
sodass
mator
pensa
nur e
befan
lampe
M
dann
von C
einan
 $90^\circ +$
so ge
= tg
des C
fernu
Spalt
unter

von C sind, wenn z. B. P auf $157,65^\circ$ und A auf $83,1^\circ$ steht. Darauf wurde A auf $38,1^\circ$ gestellt und in dieser Lage während der ganzen Dauer der Beobachtungen belassen.

Am Anfang jeder Beobachtungsreihe wurde die optische Axe des Beobachtungsfernrohres parallel der des Collimators gestellt und seine Stellung abgelesen, dann wurde die zu beobachtende Quarzplatte auf der drehbaren Axe des Spectrometers befestigt, sodass ihre Normale ungefähr einen Winkel von 45° mit der Collimatoraxe bildete, und ihre Ebene nahezu parallel der Drehungsaxe war. Nun wurde das Beobachtungsfernrohr soweit seitwärts gedreht, dass das an der Quarzplatte gespiegelte Bild von F_1 gesehen werden konnte; durch Justiren der Platte konnte dasselbe in die richtige Höhe gebracht werden (P stand dabei auf $11,5^\circ$). Durch Drehen des Fernrohres wurde dann der Mittelpunkt von F_2 auf den verticalen Faden von F_1 gebracht (P stand hierbei auf $101,5^\circ$). Diese Stellung des Fernrohres wurde abgelesen. Nachdem man so den Winkel R bestimmt hatte, um welchen das Fernrohr gedreht war, wurde letzteres in seine ursprüngliche Lage zurückgeführt und die Axe, welche die Quarzplatte trägt, um den Winkel $90^\circ - R/2$ gedreht, sodass dann die Quarzplatte senkrecht zur Axe des Collimators und des Fernrohres stand. Darauf wurden die am Compensator befindlichen Schieber so weit vorgeschoben, dass nur ein schmaler Spalt hell blieb, in dessen Mitte sich F_2 befand, und an Stelle der bis dahin benutzten Petroleumlampe eine Kochsalzflamme gesetzt.

Nach der Einschaltung des vierfachen Quarzes Q wurde dann der Polarisator P so eingestellt, dass die vier Theile von Q gleich hell erschienen. Es war dieses bei zwei zu einander senkrechten Stellungen von P der Fall, bei g° und $g^\circ + 90^\circ$. Wenn zu g° das Axenverhältniss $e = \operatorname{tg} n$ gehört, so gehört zu $g^\circ + 90^\circ$ das Axenverhältniss $-1/e = -\operatorname{ctg} n = \operatorname{tg}(n + 90^\circ)$. Es müssen also auch die beiden Stellungen des Compensators, welche bei jenen Lagen von P nach Entfernung von Q den schwarzen Streifen in die Mitte des Spaltes bringen, zwei Werthe von Δ geben, die sich um 180° unterscheiden. Stellte man also mit P auf g° den Streifen

in die Mitte des Spaltes, und drehte dann nach Einschaltung von Q den Polarisator um 90° , so musste nach Entfernung von Q der Quarzkeil in C um eine Strecke verschoben werden, welche einer Phasendifferenz von 180° entspricht. Hierauf wurde wieder Q eingeschaltet, P eingestellt, Q entfernt, C eingestellt u. s. w. So wurden die Beobachtungen immer bei vier verschiedenen Stellungen des Polarisators gemacht. Die einzelnen Einstellungen wurden in jedem Falle viermal wiederholt und das Mittel aus diesen Beobachtungen genommen. Die Abweichungen der einzelnen Ablesungen bei P betrugen selten 15 Minuten, erreichten aber nie die Grösse von 30 Minuten.

Um diejenigen Stellungen des Compensators zu ermitteln, welche als Werthe für Δ die ganzen Vielfachen von 180° gaben, wurde zum Schlusse jeder Beobachtungsreihe die Quarzplatte von der Spectrometeraxe entfernt, P auf $112,65^\circ$, resp. $202,65^\circ$ gestellt, und die dunklen Streifen an verschiedenen Stellen von C in die Mitte des Spaltes gebracht. Diese Ermittlung fand am Schlusse jeder Beobachtungsreihe statt, weil die Stellung des Spaltes etwas variirte.

Als Beispiel soll hier die erste Beobachtungsreihe, die überhaupt gemacht wurde, angeführt werden:

Stellung von P	$316,5^\circ$	$46,75^\circ$	$137,1^\circ$	$227,0^\circ$
	6,5	7,0	7,0	6,6
	7,1	6,5	6,9	6,9
	6,5	6,9	7,0	6,8
Mittel	$316,65^\circ$	$46,8^\circ$	$137,0^\circ$	$226,8^\circ$
Stellung von C	$40,38^\circ$	$50,83^\circ$	$60,99^\circ$	$71,11^\circ$
	57	93	1,01	00
	56	83	0,88	12
	46	83	0,89	00
Mittel	$40,49^\circ$	$50,86^\circ$	$60,94^\circ$	$71,06^\circ$

Ferner war:

	$\Delta = -360^\circ$	-180°	0°	180°	360°
für C auf	30,33	40,37	50,58	60,68	70,78.

Aus sämmtlichen Einstellungen ergab sich als Mittel, dass Δ um 360° wuchs, wenn die Mikrometerschraube an C um 20,22 Umdrehungen gedreht wurde. Um Δ in Graden zu erhalten, muss man die Schraubenumgänge mit $360:20,22$

= 1000:56 multipliciren. Es ergeben sich so als zusammengehörige Werthe:

$$g^{\circ} \begin{matrix} 316,65^{\circ} & 46,8^{\circ} & 137,0^{\circ} & 226,8^{\circ} \\ \frac{A}{2} & 0,12^{\circ} \cdot \frac{1000}{112} - 90^{\circ} & 0,28^{\circ} \cdot \frac{1000}{112} & 0,26^{\circ} \cdot \frac{1000}{112} + 90^{\circ} & 0,28^{\circ} \cdot \frac{1000}{112} + 180^{\circ} \end{matrix}$$

Es sollten eigentlich g und $A/2$ immer um 90° wachsen; folglich werden sich als Mittel folgende zusammengehörige Werthe ergeben:

$$g = 46,8^{\circ}, \quad \frac{A'}{2} = 0,24 \cdot \frac{1000}{112} = 2,1^{\circ} \text{ oder } g = 136,8^{\circ}, \quad \frac{A}{2} = 92,1^{\circ}.$$

Nun ist:

$$\gamma = 202,65^{\circ} - g, \quad e = \operatorname{tg} n = -\operatorname{ctg} \frac{A}{2}, \quad \text{also } n = \frac{A}{2} - 90^{\circ}.$$

Hieraus ergibt sich: $\gamma = 65,8^{\circ}$, $n = 2,1^{\circ}$.

Für jede Platte wurden auf solche Weise sechs Beobachtungsreihen in sechs verschiedenen Stellungen gemacht und dann aus den sechs Gleichungen:

$$(5) \begin{cases} \sin^2 n \cos^2 n q^2 = (\sin^4 n \cos^2 \gamma + \cos^4 n \sin^2 \gamma) \operatorname{ctg}^2 \varphi \\ + \cos 2n \sin 2\gamma \operatorname{ctg} \varphi + \sin^4 n \sin^2 \gamma + \cos^4 n \cos^2 \gamma \end{cases}$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate q^2 und $\operatorname{ctg} \varphi$ berechnet. Wie hieraus k_1 , k_2 und $l-r$ eindeutig bestimmt werden können, ist angegeben¹⁾:

Aus den Beobachtungen ergab sich:

Platte I	$\begin{cases} \gamma & +65,8^{\circ} & +64,4^{\circ} & +66,1^{\circ} & +65,7^{\circ} & +64,6^{\circ} & +64,9^{\circ} \\ n & +2,1 & +7,2 & -10,7 & +1,2 & +8,0 & -4,0 \end{cases}$
Platte II	$\begin{cases} \gamma & -15,9 & +90,5 & +29,7 & -19,4 & +90,7 & +30,4 \\ n & -24,7 & -7,2 & +24,6 & -22,3 & -8,7 & +25,8 \end{cases}$
Platte III	$\begin{cases} \gamma & -0,1 & +1,5 & +1,3 & +0,2 & +1,3 & +1,2 \\ n & -13,1 & -2,4 & +8,6 & -6,9 & -2,3 & +8,7 \end{cases}$

Hieraus folgt:

	Platte I	II	III
q^2	0,0455	4,243	35,09
$\operatorname{ctg} \varphi$	-0,4542	+0,2306	-17,98
k_1	1,236	4,350	11,93
k_2	0,809	0,230	0,084
$(l-r)/2$	-66,05 ⁰	-95,75 ⁰	-378,5 ⁰
D	2,972	1,996	1,984
d	-0,1235	-0,2665	-1,060
Θ	2,37 ⁰	7,18 ⁰	14,89 ⁰

1) B. Hecht, l. c. p. 440—441.

D bedeutet hierin die Dicke der Platten, die mit einem Sphärometer gemessen wurde; d ist gleich $(l-r)/2\pi D$, also gleich dem Gangunterschied, den eine Platte von 1 mm Dicke hervorrufen würde. Θ ist der Winkel der optischen Axe gegen die Normale der Platten.

Die zum Vergleich herangezogenen Theorien ergeben sämmtlich:

$$h_2 = \sqrt{h^2 + 1} - h = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi, \quad d^2 = p^2 \sin^4 \Theta \frac{1 + h^2}{h^2} = p^2 \frac{\sin^4 \Theta}{\cos^2 \psi},$$

worin p und $h = \operatorname{ctg} \psi$ folgende Werthe haben:

	p	$h = \operatorname{ctg} \psi$
Cauchy ¹⁾	} $\frac{n}{n'} \frac{1}{\lambda} (n' - n) = 15,44$	} $\frac{p}{d_0} \operatorname{tg}^2 \Theta$
v. Lang I ²⁾		
Lommel ³⁾	} $\frac{n^2 - 1}{n'^2 - 1} \cdot \frac{n'^2 - n^2}{2n\lambda} = 15,27$	} $\frac{p}{d_0} \operatorname{tg} \Theta \sin \Theta$
Ketteler ⁴⁾	} $\frac{n'^2 - n^2}{2n\lambda} = 15,58$	
v. Lang II ⁵⁾	} $\frac{n}{n'} \frac{n'^2 - n^2}{2n'\lambda} = 15,40$	} $\frac{p}{d_0} \sin^2 \Theta$
Voigt ⁶⁾		

Zur Berechnung der numerischen Werthe von p wurde $n' = 1,55338$, $n = 1,54423$ und $\lambda = 0,000589$ gesetzt. Führt man noch $d_0 = 0,1207$ ein, so ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe:

Platte		Cauchy u. v. Lang I	Lommel	Ketteler	v. Lang II u. Voigt	beob.
I	$-d$	0,1234	0,1233	0,1235	0,1235	0,1235
	k_2	0,805	0,807	0,803	0,805	0,809
II	$-d$	0,2689	0,2665	0,2713	0,2691	0,2665
	k_2	0,233	0,235	0,233	0,237	0,230
III	$-d$	1,026	1,014	1,035	1,024	1,060
	k_2	0,055	0,056	0,057	0,059	0,084

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3) 30. p. 68. 1850.

2) v. Lang, Pogg. Ann. 119. p. 85. 1863.

3) Lommel, Wied. Ann. 15. p. 389. 1881.

4) Ketteler, Theoretische Optik. p. 419—421. 1885.

5) v. Lang, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 622. 1878.

6) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 899. 1883, gibt nur das Axenverhältniss.

Die Beobachtungen ergeben also Resultate, die mit allen Theorien annähernd übereinstimmen. Nur bei Platte III sind die Abweichungen grösser, und zwar wohl deshalb, weil bei ihr γ und n immer sehr klein sind. Dadurch werden auch die Coëfficienten der Gl. (5) sehr klein, und die Beobachtungsfehler haben einen grösseren Einfluss, sodass die Schlussresultate ungenauer werden.

Eine Entscheidung zwischen einzelnen Gruppen von Theorien herbeizuführen, ist indessen mit den vorhandenen Hilfsmitteln noch nicht möglich gewesen. Der Grund hierfür ist wohl auch darin zu suchen, dass der Zusammenhang der beobachtbaren Grössen, für welche ja bei der angewendeten Methode zwei gesonderte Einstellungsobjecte vorhanden sind, mit den gesuchten Grössen kein directer, sondern durch mehrere Gleichungen vermittelt ist. Theilweise mögen die Ungenauigkeiten auch durch die Depolarisation, welche durch die Linsen des Fernrohres hervorgerufen wird, verursacht werden.

Min. Inst. der Univ. in Königsberg i./Pr.

V. *Constanz des Refraktionsvermögens;* *von E. Ketteler.*

Man hat bisher die Abhängigkeit der Brechungsindices (n) fester und flüssiger Medien von der Temperatur (t) in ähnlicher Weise wie die des Volumens (v) und der Dichte (d) empirisch durch eine nach Potenzen der Temperatur fortschreitende Reihe darzustellen gesucht. So brauchen Jamin¹⁾, Rühlmann²⁾, Lorenz³⁾ und andere die Formen:

$$\begin{aligned} n &= a - bt - ct^2 \dots \\ d &= \alpha - \beta t - \gamma t^2 \dots, \end{aligned}$$

- 1) Jamin, Compt. rend. 43. p. 1191. 1856.
- 2) Rühlmann, Pogg. Ann. 132. p. 1 u. 177. 1867.
- 3) Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 78. 1880.

während nach Wüllner¹⁾ für geringe Temperaturintervalle von 10—20° schon die die quadratischen Potenzen enthaltenden Glieder ausser Acht gelassen werden dürfen.

In analoger Weise haben Mascart²⁾, ich selbst³⁾ und neuerlich Chappuis und Rivière⁴⁾ die Brechungsindices (n) der Gase und Dämpfe mittelst der Beziehung:

$$n - 1 = Ap(1 + Bp)$$

als Function des Druckes (p) dargestellt, und hat sich hierin B als eine zwar kleine, aber doch unentbehrliche Constante herausgestellt. Aehnliche Versuche von Jamin und Quincke⁵⁾ an Flüssigkeiten halten sich innerhalb engerer Grenzen.

Wenn es sich dagegen allgemeiner um den Zusammenhang zwischen Brechungsverhältniss und Dichtigkeit handelt, pflegt man sonderbarer Weise in Experimentalarbeiten von der verwickelten Reihenform ganz abzusehen, nimmt vielmehr a priori eine möglichst einfache Beziehung zwischen beiden als nothwendig an. Dieselbe wird dann bezeichnet als der Satz von der Constanz des Brechungsvermögens, und man definirt letzteres in neuerer Zeit durch einen der Ausdrücke:

$$\frac{n^2 - 1}{d}, \quad \frac{n - 1}{d}, \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{d}.$$

Während der erstere, von der Emanationstheorie übernommene, sich schon bald als nicht stichhaltig erwies und durch den zweiten — dessen nachträgliche Legitimisirung von De Klercker⁶⁾, Christiansen⁷⁾ u. a. versucht ist, ersetzt wurde, wird in neuester Zeit die dritte Form bevorzugt.

Dieselbe ist zunächst von L. Lorenz⁸⁾ unter Zuhülfnahme anziehender Kräfte zwischen Molecülen und Aethertheilchen theoretisch entwickelt und später von H. A. Lorentz⁹⁾ als mit den Principien der electromagnetischen Licht-

1) Wüllner, Pogg. Ann. 133. p. 1. 1868.

2) Mascart, Compt. rend. 78. p. 617 u. 679. 1874.

3) Ketteler, Theoretische Optik. Braunschweig 1885. p. 481.

4) Chappuis u. Rivière, Compt. rend. 103. p. 37. 1886.

5) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 401. 1883.

6) De Klercker, Dispersion prismatique. Stockholm 1882.

7) Christiansen, Wied. Ann. 23. p. 298. 1884.

8) L. Lorenz, Pogg. Ann. 121. p. 593. 1864 u. Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

9) H. A. Lorentz, Wied. Ann. 9. p. 641. 1880.

theorie in Uebereinstimmung stehend dargethan worden. Seitdem ist dieses neue Brechungsvermögen von einer Reihe von Physikern und Chemikern acceptirt worden. Dahin gehören Schrauf¹⁾, der frühere Vertreter des Newton'schen Brechungsvermögens, Landolt²⁾ und Brühl³⁾ in ihren Arbeiten über die Refractionsäquivalente, ferner Prytz⁴⁾, Exner und andere.

Sehen wir uns jetzt die experimentellen Beweise an, die sich für den oben erörterten Begriff eines Brechungsvermögens müssen ausführen lassen, so werden dieselben auf eine dreifache Form hinauskommen.

Erstens muss bei Gasen direct gezeigt werden können, dass die Aenderungen des Brechungsindex und der Dichtigkeit in einem linearen Zusammenhange zu einander stehen.

Zweitens müssen bei flüssigen Medien die beobachteten Temperaturcoëfficienten, resp. Elasticitätscoëfficienten theoretisch berechnet werden können.

Drittens endlich muss sich das Brechungsvermögen beim Uebergang vom flüssigen Aggregatzustand in den gasförmigen als constant nachweisen lassen.

Was den ersten Punkt betrifft, so haben in der That Chappuis und Rivière für Gase, für welche freilich wegen der Kleinheit des Ueberschusses des Brechungsindex über die Einheit die oben stehenden Formen bezw. mit den folgenden:

$$\frac{2(n-1)}{d}, \quad \frac{n-1}{d}, \quad \frac{2(n-1)}{3} \frac{1}{d}$$

zu identificiren sind, deren wirkliche Constanz dargethan. Es handelte sich insbesondere um Kohlensäure, welche bei der constanten Temperatur von 21° bis zu 19 Atmosphären comprimirt wurde. Während man aus den Versuchen selbst die Constanten *A* und *B* des zusammengesetzten Ausdrucks auf vorstehender Seite ableitete, wurde die zugehörige Dichte mit-

1) Schrauf, Wied. Ann. 28. p. 433. 1886.

2) Landolt, Sitzungsber. der Berl. Acad. 1882. p. 64 u. Lieb. Ann. 213. p. 75. 1882.

3) Brühl, Lieb. Ann. 235. p. 1. 1886.

4) Prytz, Wied. Ann. 11. p. 104. 1880.

telst der von Clausius¹⁾ für Kohlensäure gegebenen Daten berechnet. Man fand dieselbe von der Form:

$$d = Cp(1 + Bp),$$

und da die hierin vorkommende Constante B sich mit der aus den optischen Messungen ergebenden als identisch erwies, so fällt sonach bei Bildung des Quotienten $(n-1)/d$ die ganze Klammer heraus, und dieser letztere wird streng constant.

Die Abnahme andererseits, welche die Brechungsindizes flüssiger Medien pro Grad Temperaturerhöhung erfahren, ist von Hrn. H. A. Lorentz²⁾ mittelst des neuen Brechungsvermögens berechnet worden. Derselbe benutzte dazu die Resultate der oben erwähnten Arbeit Wüllner's, welche sich zwar nur auf ein Temperaturintervall von wenig mehr als 10° bezieht, innerhalb desselben aber die grösste Zuverlässigkeit beanspruchen dürfte. Das Ergebniss einiger dieser Rechnungen (für die rothe Wasserstofflinie) enthält die folgende Zusammenstellung.

	Abnahme für 1° C.		δ	x
	beobachtet	berechnet		
Glycerin	0,000 265	0,000 267	— 2	2,076
1 Alkohol, 2 Glycerin .	0,000 305	0,000 330	— 25	3,246
Alkohol	0,000 389	0,000 429	— 40	4,163
Schwefelkohlenstoff . .	0,000 780	0,000 920	— 140	4,274

Wie aus der Columnne der δ hervorgeht, ist die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung wenig befriedigend. In etwas anderer Weise erhält diese Thatsache auch aus der von mir hinzugefügten letzten Columnne, welche die Zahl x enthält, die in der allgemeineren Formel:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + x} \frac{1}{d}$$

den beiden extremen Beobachtungen genügen würde. Während dieselbe allerdings für Glycerin nahe mit dem theoretischen Werthe 2 zusammenfällt, steigt sie für die weiteren Medien bis auf den doppelten Betrag an. Um also die

1) Clausius, Wied. Ann. 9. p. 337. 1880 und 14. p. 279, 692. 1881.

2) H. A. Lorentz, Wied. Ann. 9. p. 660. 1880.

Wüllner'schen Messungen einigermaßen mit dem Lorenz-Lorentz'schen Ausdruck in Einklang zu bringen, dazu wird es gewisser Zusatzglieder bedürfen.¹⁾

Die weiteren Erörterungen knüpfe ich an eine Formel, welche gleichzeitig auch das Newton'sche Brechungsvermögen berücksichtigen soll.

Ich gehe aus von dem an anderem Orte²⁾ von mir begründeten Ausdruck:

$$(I) \quad \frac{n^2 - 1}{d} (1 - \beta d) = C,$$

bei dessen Ableitung angenommen ist, dass entweder die ponderable Masse Aether verdränge, oder dass sich die in Betracht kommenden Molecularfunctionen linear mit der Dichte ändern, oder dass beides zugleich der Fall sei. β und C sind alsdann für dieselbe Farbe constant, und wird β überhaupt von der Schwingungsdauer unabhängig sein.

Schreibt man diese Gleichung:

$$(1) \quad \frac{n^2 - 1}{d} = \frac{C}{1 - \beta d},$$

so lässt sie sich auch auf die Form bringen:

$$(2) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{d} = \frac{\frac{1}{3} C}{1 + (\frac{1}{3} C - \beta) d}.$$

Es genügt also, C und β aus zwei bei verschiedenen Temperaturen gemachten Beobachtungen von n und d zu berechnen, um aus der Grösse der Coefficienten β , resp. $(\frac{1}{3} C - \beta)$ auf den Grad der Mangelhaftigkeit der Newton'schen, resp. Lorenz'schen Annahme schliessen zu können.

Der folgenden Tab. I sind wieder die Wüllner'schen Daten (für rothes Licht) zu Grunde gelegt.

Die Tabelle lehrt, dass der Coefficient $(\frac{1}{3} C - \beta)$ nur in zwei Fällen (Glycerin und 1 Alkohol, 4 Glycerin) klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können, während er allerdings durchweg kleiner ist als β . In zwei Fällen (Chlorzinklösung und 1 Wasser, 4 Chlorzinklösung) hat dagegen β den

1) Auch den oben citirten Druckversuchen Quincke's entsprach derselbe weniger gut als der empirische $(n - 1)/d$.

2) Ketteler, Theor. Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Braunschweig 1885. p. 103—109.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXX.

kleineren Werth. Bezüglich der mitgetheilten Zahlen ist freilich zu bemerken, dass dieselben wegen der grossen Nähe der Grenzbeobachtungen schon bei geringfügiger Aenderung der zur Berechnung dienenden Indices beträchtliche relative Verschiebungen erfahren. Gibt man überhaupt die Richtigkeit der angewandten Formel zu, so dürften die Werthe von C und β nur etwa auf fünf Einheiten der dritten Stelle sicher sein.

Tabelle I.

	C	β	$\frac{1}{3}C$	$\frac{1}{3}C - \beta$
Glycerin	0,661	0,216	0,220	+0,005
1 Wasser; 3,7 Glycerin	0,640	0,224	0,213	-0,010
1 " 1 "	0,595	0,258	0,198	-0,060
1 " 0,5 "	0,572	0,278	0,191	-0,086
1 Alkohol; 4 "	0,699	0,229	0,233	+0,004
1 " 2 "	0,777	0,183	0,259	+0,076
1 " 0,998 "	0,795	0,202	0,265	+0,063
1 " 0,4997 "	0,839	0,189	0,279	+0,090
Alkohol	0,918	0,178	0,306	+0,128
Gesättigte Chlorzinklösung	0,559	0,071	0,186	+0,116
1 Wasser; 3,997 "	0,577	0,084	0,192	+0,108
1 " 1,996 "	0,569	0,116	0,190	+0,073
1 " 0,9998 "	0,571	0,145	0,190	+0,045
Schwefelkohlenstoff	0,981	0,186	0,327	+0,141
1 Alkohol; 3,995 "	0,975	0,177	0,325	+0,147
1 " 2,12836 "	0,968	0,174	0,323	+0,149
1 " 1,03111 "	0,953	0,175	0,318	+0,143
Wasser				
Zwischen 10—30°	0,450	0,420	0,150	-0,270
" 15—25°	0,458	0,408	0,153	-0,255

Aus dieser Verschiebbarkeit erklären sich zum Theil auch die Unregelmässigkeiten, welche der Verlauf der Constanten für die untereinander stehenden Mischungen zeigt. Unter Benutzung der Mischungsformeln¹⁾:

$$C = \frac{p_1}{p_1 + p_2} C_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} C_2,$$

$$\beta = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \beta_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \beta_2.$$

habe ich insbesondere die Mischungen von Alkohol und Schwefelkohlenstoff einer Specialberechnung unterzogen. Nimmt man in der folgenden Tabelle II die für reinen Alkohol (C_1, β_1) und reinen Schwefelkohlenstoff (C_2, β_2) willkürlich

1) Ketteler, Theor. Optik, p. 108.

corrigirten Werthe als zulässig an, so ergeben sich für die einzelnen Mischungen die beigeschriebenen Werthe. Mittelst derselben lassen sich dann die Indices (etwa für 15°) zurückberechnen; den Vergleich zwischen ihnen und den beobachteten gibt die Columnne δ .

Tabelle II.

	C	β	n beob.	n ber.	δ
Schwefelkohlenstoff	0,98042	0,18566	1,62237	1,62207	+ 30
1 Alk.; 3,955 Schw.	0,96904	0,18220	1,54110	1,54164	- 54
1 " 2,12836 "	0,96239	0,18017	1,50309	1,50400	- 91
1 " 1,0311 "	0,95265	0,17721	1,45729	1,45827	- 98
Alkohol	0,92402	0,16850	1,36260	1,36200	+ 60

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung keineswegs befriedigend.

Wenden wir uns weiter zum Uebergang aus dem flüssigen in den gasförmigen Aggregatzustand, so hält Hr. L. Lorenz die Constanz seines Brechungsvermögens gerade hierbei für erwiesen. Er und Hr. Prytz zählen nicht weniger als siebzehn Stoffe auf, für welche dieselbe zutreffen soll.¹⁾ Freilich geben diese Physiker zu, dass die „Refractionsconstante“ bei allen mit fortschreitender Verdünnung eine kleine Vergrößerung erfährt, — am auffallendsten wieder bei Schwefelkohlenstoff.

Wenn Hr. Lorenz beispielsweise für 10°, 20° und für den dampfförmigen Zustand die (auf die Natriumlinie bezüglichen) Zahlen gibt:

	10°	20°	Dampf
Aethylalkohol . . .	0,28042	0,28066	0,2825
Wasser	0,20615	0,20608	0,2068
Schwefelkohlenstoff .	0,28052	0,28086	0,2898

so haben die obigen Rechnungen wohl zur Genüge darge-
than, dass die anscheinend so kleinen Differenzen zwischen den beiden ersten Columnen in Wirklichkeit mit den Ver-
suchen in Widerspruch stehen.

Statt also aus vorstehenden Zahlen etwa den Mittel-
werth zu bilden, erscheint es angemessener, die für den Gas-

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 100. 1880. K. Prytz, Wied. Ann. 11. p. 118. 1880.

zustand experimentell gegebene Constante ($\frac{1}{3}C$) mit einer Beobachtung des Flüssigkeitszustandes zu combiniren, um so nach Gleichungen (1) oder (2) die zweite Constante β zu berechnen. Man erhielt so:

Tabelle III.

	$\frac{1}{3}C$	β	$\frac{1}{3}C - \beta$
Alkohol	0,2825	0,2742	+ 0,0083
Wasser	0,2068	0,2031	+ 0,0037
Schwefelkohlenstoff	0,2898	0,2645	+ 0,0254
Schwefl. Säure . .	0,1596	0,1273	+ 0,0323

Die auf die schweflichte Säure bezüglichen Daten sind meinen eigenen Beobachtungen¹⁾ entnommen.

Vergleicht man jetzt die Tabellen I und III, so sieht man, dass sämtliche Coëfficienten völlig neue, unter einander unvergleichbare Werthe angenommen haben. Daraus ergibt sich denn mit Nothwendigkeit der Schluss, dass auch die Formeln (1), resp. (2) nicht ausreichen, sondern noch weiterer Zusatzglieder bedürfen.

Die Art und Weise, wie diese Vervollständigung zu geschehen habe, bleibt freilich einstweilen, solange darüber theoretische Anhaltspunkte fehlen, mit grosser Unsicherheit verknüpft. Die erste Annahme, die sich hier bietet, ist wohl die, versuchsweise Gleichung (I), unter Aufnahme eines dem Quadrate der Dichtigkeit proportionalen Gliedes, durch die folgende:

$$(II) \quad \frac{n^2 - 1}{d} (1 - \beta d - \gamma d^2) = C$$

zu ersetzen und hierin bei Anwendung des dem Gaszustand zukommenden C die beiden Constanten β und γ mittelst zweier bei verschiedenen Temperaturen gemachten Flüssigkeitsbeobachtungen zu berechnen. In dieser Weise ist die folgende Tab. IV entstanden, deren Ausgangszahlen (für Natriumlicht) sämtlich der Arbeit von Lorenz entnommen sind:

1) Ketteler, Theor. Optik. p. 482.

Tabelle IV.

	Temp.- Intervall	C	β	γ	$\frac{1}{3}C - \beta$	C
Schwefelkohlenstoff	5—25	0,8696	+0,3433	—0,0703	—0,0535	0,2899
Alkohol	15—25	0,8475	+0,5205	—0,2316	—0,2380	0,2825
Wasser	10—30	0,6204	—0,1815	+0,3811	+0,3883	0,2068
Chloroform . . .	10—20	0,5388	+0,1967	—0,0128	—0,0171	0,1796
Aethyljodid . . .	10—20	0,4713	+0,1662	—0,0070	—0,0090	0,1571

Man sieht aus der Tabelle, dass β und γ stets entgegengesetztes Vorzeichen haben, und dass speciell für Wasser β und $(\frac{1}{3}C - \beta)$ das Vorzeichen der Tab. I gewechselt haben. Während γ nur für die beiden letzten Substanzen einigermaßen klein ist, für die drei ersteren dagegen beträchtliche Werthe hat, ist die Differenz von γ und $(\frac{1}{3}C - \beta)$, wie ja nach den Lorenz'schen Zahlen auf p. 291 zu erwarten war, zwar überall klein, doch darum nicht minder wichtig.

Damit erscheint die weitere Behandlung des uns beschäftigenden Problems in Rücksicht auf die Mangelhaftigkeit des verwendbaren Beobachtungsmaterials im allgemeinen vorläufig abgeschlossen. Glücklicher Weise gibt es indes eine Substanz, das Wasser, welches wohl namentlich infolge seiner bekannten Anomalien die Aufmerksamkeit auf sich lenkte, und welches zwischen beträchtlich entfernten Temperaturgrenzen nach verschiedenen Methoden untersucht ist. Halten wir uns hier an die Arbeit Rühlmann's¹⁾ als an diejenige, die uns für den vorgesteckten Zweck am werthvollsten scheint. In der folgenden Tab. V enthält die erste Columne die Temperatur t , die zweite nach Matthiessen²⁾ die entsprechenden Volumen v des Wassers und die dritte die von Rühlmann gemessenen Brechungsindices für Natriumlicht. Diese letzteren, zunächst nach der prismatischen Methode gewonnen, sind bereits mittelst einer empirischen Ausgleichungsformel von ihren zufälligen Unstetigkeiten befreit. Nach Rühlmann dürften die Indices für niedere Temperaturen bis auf wenige Einheiten der fünften und für

1) Rühlmann, Pogg. Ann. 132. p. 186. 1867.

2) Matthiessen, Pogg. Ann. 128. p. 534. 1866.

höhere bis auf etwa 1 – 2 Einheiten der vierten Decimale sicher sein.

Tabelle V.

t	v	n beob.	n ber.	δ	t	v	n beob.	n ber.	δ
0°	1,000 000	1,33374	1,33351	+ 23	40°	1,00761	1,32901	1,32901	0
4	0,999 877	1,33369	1,33359	+ 10	50	1,01185	1,32662	1,32669	- 7
8	1,000 000	1,33354	1,33351	+ 3	60	1,01684	1,32397	1,32413	- 16
10	1,000 15	1,33342	1,33342	0	70	1,02253	1,32121	1,32136	- 15
20	1,001 69	1,33250	1,33248	+ 2	80	1,02882	1,31853	1,31853	0
30	1,004 23	1,33101	1,33096	+ 5					

Die Differenz der extremen Volumina beträgt 0,0288, die der extremen Brechungsquotienten 0,0150.

Was weiter die Zahlen der vierten Columnne betrifft, so habe ich dieselben im Anschluss an die obigen Formeln mittelst des verallgemeinerten Ausdruckes:

$$(III) \quad \frac{n^2 - 1}{d} (1 - \beta d - \gamma d^2 - \delta d^3 - \varepsilon d^4 - \dots) = C$$

berechnet, dabei aber unter Beschränkung auf die Dreizahl oder Vierzahl der von d abhängigen Glieder der Klammer verschiedene Combinationen derselben geprüft. Als Resultat dieser ziemlich langwierigen Bemühungen hat sich etwa Folgendes ergeben:

1) Es sind mindestens drei solcher Glieder zur genäher-ten Darstellung der Beobachtungen erforderlich.

2) Unter Zugrundelegung der Daten für $t = 10, 40, 80$ haben die Combinationen von Gliedern mit d, d^2, d^3 oder mit d, d^2, d^4 insofern unbefriedigende Resultate gegeben, als die successiven Coëfficienten bei ihren alternirenden Vorzeichen unwahrscheinlich grosse Zahlenwerthe erhielten.

3) Bei Benutzung der nämlichen Beobachtungsdaten ergaben sich für folgende weitere Combinationen die numerischen Coëfficienten:

$$y = 1,5530 d - 3,0487 d^2 + 1,6986 d^3,$$

$$y = 0,8491 d - 1,9644 d^4 + 1,3182 d^5,$$

$$y = 1,2294 d - 1,9433 d^2 + 0,9168 d^4,$$

$$y = 1,6125 d^2 - 3,0669 d^4 + 1,6573 d^6,$$

$$y = 0,4626 d - 0,6245 d^4 + 0,8649 d^6,$$

worin abkürzungsweise gesetzt ist:

$$y = 1 - \frac{Cd}{n^2 - 1},$$

und C nach wie vor den Lorenz'schen Werth 0,62035 des Dampfzustandes bedeutet.

4) Berechnet man mittelst einer der vier ersten dieser Formen die Brechungsindices aus den reciproken Matthiesen'schen Volumen, so erhält man für alle wesentlich gleiche Zahlen. Diese so berechneten Indices findet man in Columne 4 der Tabelle V und die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung in Columne δ .

Eine ähnliche Benutzung der letzten der vorstehenden Formen liefert im allgemeinen etwas grössere Abweichungen; dieselbe ist bereits streng genommen eine durch Zuziehung von $t = 60$ gewonnene Ausgleichungsform.

Bleibt man bei den Zahlen der Columne 4 stehen, so sieht man, dass die Beobachtungsfehler für das weite Intervall von 8° — 80° kaum überschritten sind, während sie allerdings für das Intervall von 0° — 8° erheblich kleiner sind als die berechneten δ . Der Grund dieses Verhaltens ist leicht einzusehen.

Während nämlich das Wasser thatsächlich die Anomalie zeigt, dass dem Dichtigkeitsmaximum bei 4° nicht auch zugleich ein maximaler Brechungsindex entspricht, dass folglich in der Nähe von 4° sich einer gegebenen Dichte zwei verschiedene Temperaturgrade und zwei verschieden grosse Brechungsverhältnisse zuordnen, ergibt die hier angewandte Formel für jedes d nur einen einzigen Werth von y und n . Ohne hier einen Erklärungsversuch der in Rede stehenden Anomalie wagen zu wollen, mag nur darauf hingewiesen werden, dass man wahrscheinlich einen ganz anderen Verlauf der Brechungsverhältnisse erhalten würde, wenn man die Dichtigkeitsänderungen durch Druck statt durch Abkühlung hervorrufen würde. Stehen also für die vorliegenden Beobachtungen die n und t in einem einfacheren Zusammenhang als die n und d , und rührt die Anomalie ohne Zweifel daher, dass sich die oben als constant angenommenen Coëfficienten γ , δ , ... in der Nähe des Uebergangspunktes vom

flüssigen in den festen Aggregatzustand mit der Temperatur stetig ändern, so sind diese Aenderungen doch immerhin nur klein. Auch wir werden uns daher üblicher Weise vorläufig damit begnügen dürfen, dass wir dem Wasser für höhere Temperaturen, etwa von 10° ab, ein ähnliches Verhalten zuschreiben wie den übrigen Flüssigkeiten.

Sowie man schliesslich aus Tabelle V ersieht, dass die Aenderungen des Brechungsindex für 1° mit Abnahme der Dichtigkeit fortwährend zunehmen, so gilt das nämliche bezüglich unserer Function y . Ueberblickt man in der That die folgende Zusammenstellung einiger zusammengehöriger Werthe von t und y :

$t =$	0°	4	10	40	60	80
$y =$	0,2035	0,2033	0,2028	0,1965	0,1897	0,1835,

so zeigt sich y so wenig constant, dass damit alle älteren Annahmen und insbesondere die oben p. 286 formulirten Beziehungen als nur rohe Annäherungen an die Erfahrung betrachtet werden dürfen.

Bemerkenswerther Weise erscheint in allen unter 3) besprochenen Formen der Coëfficient β , welcher sich in Tabelle IV für Wasser, entgegen dem Verhalten der anderen Flüssigkeiten, als negativ herausgestellt hatte, nunmehr gleichfalls als positiv.¹⁾

Um auch noch die Dispersion des Wassers in Betracht

1) Aus theoretischen Gründen dürfte vielleicht bei späteren ähnlichen Untersuchungen statt des Ausdrucks III die folgende Form den Vorzug verdienen:

$$\frac{n^2 - 1}{d} (1 - \beta d) = C (1 + \gamma d^p + \delta d^q + \dots)$$

Als in der That nachträglich, d. h. nach Abschluss der Arbeit, die Rechnung probeweise unter der Annahme $p = 3$, $q = 6$ durchgeführt wurde, ergab sich:

$$\frac{n^2 - 1}{d} - C = 0,6659 (n^2 - 1) - 0,6461 d^3 + 0,2858 d^6.$$

Ein Resultat, welches gegen die dritte der früheren Formen auf p. 294 erheblich kleinere Coëfficienten hat, und welches wohl noch günstiger ausgefallen wäre, wenn man statt der Temperaturen 10, 40, 80 etwa 20, 50, 80 benutzt hätte.

zu ziehen, so werde bemerkt, dass Rühlmann's Versuche sich auf homogenes Lithium-, Natrium- und Thalliumlicht beziehen. Berechnet man für die verschiedenen Temperaturen den Quotienten der brechenden Kräfte $(n^2 - 1)$ für Gelb und Roth, resp. für Grün und Roth, so erhält man folgende Tabelle.

Tabelle VI.

t	$\frac{n_N^2 - 1}{n_L^2 - 1}$	$\frac{n_T^2 - 1}{n_L^2 - 1}$	t	$\frac{n_N^2 - 1}{n_L^2 - 1}$	$\frac{n_T^2 - 1}{n_L^2 - 1}$
0	1,00758	1,01428	60	1,00718	1,01870
10	1,00756	1,01424	70	1,00721	1,01439
20	1,00751	1,01406	80	1,00741	1,01569 *
40	1,00737	1,01366			

Da die hier benutzten Indices selber schon das Resultat von Ausgleichsformeln sind, so zeigen die Quotienten keinen sprunghaften, sondern einen continuirlichen Verlauf mit anscheinendem Minimum bei etwa 60°. Nichtsdestoweniger betrachte ich in Rücksicht auf die Grösse der Beobachtungsfehler sämmtliche Zahlen der beiden letzten Verticalcolumnen (mit Abrechnung der mit einem Sternchen versehenen letzten, die offenbar in das ganze System nicht recht hineinpasst) als wesentlich gleich.¹⁾

Demnach haben wir — wenigstens für höhere Temperaturen — in Uebereinstimmung mit dem von mir experimentell gefundenen Dispersionsgesetz²⁾ und unter Zuziehung des Gaszustandes für zwei verschiedene Farben 1 und 2 genähert:

$$\text{IV.} \quad \frac{n_2^2 - 1}{n_1^2 - 1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Die Vergleichung dieser Relation mit Ausdruck III lehrt sodann, dass die dort vorkommenden Coëfficienten $\beta, \gamma, \delta \dots$ von der Farbe jedenfalls nur sehr wenig abhängig sind. Ersetzen wir daher in demselben die brechenden Kräfte, resp.

1) Auch nach den auf Wasser bezüglichen Interferenzversuchen Lorenz' würde der Quotient $(n_N^2 - 1)/(n_L^2 - 1)$ oberhalb 25° constant sein, dagegen soll derselbe bei den niedrigen Temperaturen merkliche Verschiebungen erleiden.

2) Vgl. darüber sowie über die Versuche von Ketteler, Lorenz und Prytz in Ketteler, Theor. Optik. p. 103, 461 u. flg.

Indices C , n irgend einer endlichen Wellenlänge durch die Grenzwerte C_∞ , n_∞ für eine unendlich grosse Wellenlänge, so gilt auch nahezu:

$$\text{III}_b. \quad \frac{n_\infty^2 - 1}{d} (1 - \beta d^o - \gamma d^p - \dots) = C_\infty,$$

unter o , p , $q \dots$ die empirischen Exponenten der unter 3) besprochenen Formen verstanden.

Selbstverständlich steht nichts im Wege, den Grenzwert n_∞ aus vier zusammengehörigen, möglichst weit in der Farbenscala voneinander abstehenden Dispersionsbeobachtungen mittelst einer der (für durchsichtige Medien) immer ausreichenden Näherungsformeln:

$$n^2 = -k\lambda^2 + n_\infty^2 + \frac{M}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

$$n^2 = -h\lambda^2 + n_\infty^2 + \frac{\mathfrak{B}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{C}}{\lambda^4}$$

explicite zu berechnen, dagegen sind für diesen Zweck die sogenannten Cauchy'schen Formeln als ungenügend zurückzuweisen.¹⁾ Die in Rede stehende Ausrechnung von n_∞ erscheint sogar stets geboten, wenn nicht die Abhängigkeit der Indices einer und derselben Substanz von der Dichtigkeit untersucht, sondern mehrere Substanzen von verschiedener Dispersivkraft, resp. Dispersionsconstanten M und λ_m in Bezug auf ihr Brechungsvermögen verglichen werden sollen.

Bezeichnen wir schliesslich den Coëfficienten C_∞ als das auf den ideellen Gaszustand reducirte Brechungsvermögen, so erhebt sich die praktisch wichtige Frage, ob derselbe mittelst blosser Temperaturbeobachtungen aus dem flüssigen Zustand allein — unter Ignorirung des Gaszustandes — erschlossen werden könne. Ich glaube, dieselbe in Anbetracht der Misslichkeit einer so weitgehenden Extrapolation für jetzt entschieden verneinen zu dürfen. Da indes das reducirte Brechungsvermögen C_∞ die Fundamentalgrösse der ganzen Lehre von den Refractionsäquivalenten ist, so bleibt wohl für alle Substanzen, welche sich nicht direct im gasförmigen Zustand untersuchen lassen, kein anderes Aus-

1) Vgl. Ketteler, Theor. Optik p. 541 u. 554 sowie den folgenden Aufsatz.

kunftsmittel übrig, als sich einstweilen mit dem Nothbehelf der Lorenz'schen Refractionsconstante oder eines ähnlich gebauten Ausdrucks zu begnügen. Darauf gebaute weitere Schlüsse sind also nur mit Vorsicht aufzunehmen.

Die Fortführung dieser Arbeit unter Verwerthung eigener Versuche soll einer zweiten Mittheilung vorbehalten bleiben.

Bonn, im October 1886.

VI. Zur Handhabung der Dispersionsformeln; von E. Ketteler.

In einem kürzlich von Hrn. J. W. Brühl¹⁾ veröffentlichten umfangreichen Aufsätze: „Experimentelle Prüfung der älteren und der neueren Dispersionsformeln“, kommt derselbe (p. 288) zu dem Schlusse, „dass, ebensowenig wie irgend eine der aus den älteren, auch keine der aus den neueren Theorien abgeleiteten Formeln, deren Anwendbarkeit ebenfalls beschränkt ist, den wahren Ausdruck des in der Natur wirkenden Gesetzes der Dispersion darstellt. Alle sind sie bis zu einem bestimmten Grade anwendbar, und alle versagen, wenn man versucht, sie über eine gewisse Grenze auszudehnen“.

Da die von mir vor kurzem publicirten ähnlichen Rechnungen²⁾ zu gänzlich verschiedenen Folgerungen gelangen, so dürfte der zu Tage tretende schroffe Widerspruch wohl nur auf äussere Gründe zurückzuführen sein. Bekanntlich bestehen in der praktischen Dispersionslehre mehr als anderswo Unklarheiten und Missverständnisse, und wenn ich dieselben in meinen Auseinandersetzungen auf p. 554 meines Buches möglichst zu beseitigen gesucht habe, so ist das hiernach wohl nur erst theilweise gelungen.

Hr. Brühl beschränkt seine Untersuchung auf den idealen Grenzfall der „durchsichtigen“ Medien, und er prüft

1) J. W. Brühl, Liebig's Annalen der Chemie 236. p. 233–290. 1886.

2) Ketteler, Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Braunschweig 1885. p. 540 u. flgde.

die Formeln von Cauchy, v. Helmholtz und mir an einer grossen Reihe von Substanzen mit starker und schwacher Dispersion.

Versteht man unter ν den Refractionscoefficienten, unter $\alpha = (2\pi/\lambda)\kappa$ den Absorptions- und unter κ den Extinctionscoefficienten, und ist λ die Wellenlänge, so lauten die von mir für beliebig zusammengesetzte absorbirende Medien aufgestellten Formeln folgendermassen¹⁾:

$$\nu^2 - \nu_\infty^2 - \nu_x^2 = \sum \frac{M(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2},$$

$$2\nu\kappa = \sum \frac{Mg\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2 \lambda^2}.$$

Darin bedeutet noch M die Dispersionsconstante, λ_m die ungefähre Mitte des Absorptionsgebietes, g die Reibungsconstante, und beziehen sich die Summenzeichen auf die Zahl der vorhandenen Absorptionsstrecken. ν_∞ endlich ist der Grenzwert, dem sich ν für $\lambda = \infty$ nähert, und dem sich die Grenzwerte $\kappa_\infty = \alpha_\infty = 0$ zuordnen. Als anderen Extremfall für $\lambda = 0$ hat man: $\nu = \nu_0$, $\kappa_0 = \alpha_0 = 0$ und sonach $\nu_\infty^2 - \nu_0^2 = \Sigma M$.

Beschränkt man die Formeln auf Medien, deren Absorption innerhalb des der Beobachtung zugänglichen Strahlungsgebietes gering ist, so ist nur die erste derselben heranzuziehen, und dürfen darin g und κ vernachlässigt werden. Schreibt man diesen Medien überdies eine doppelte Lichtschwächung zu, eine im Ultraviolett ($\lambda_m = \lambda_m'$) und eine im Ultraroth (λ_m''), so ist λ_m' gegen λ relativ sehr klein und λ_m'' sehr gross. Eine kurze Entwicklung gibt dann:

$$(I) \quad \nu^2 = -k\lambda^2 + \alpha^2 + \frac{M}{\lambda^2 - \lambda_m^2} = -k\lambda^2 + \alpha^2 + \frac{D\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

und ist hierin bei kleinem k die neue Constante α^2 nur wenig von ν_∞^2 verschieden.

Der Vorzug des vorbeschriebenen Formelsystems besteht meines Erachtens wesentlich darin, dass dasselbe den einzelnen Absorptionscentren auf den Verlauf der Refractions- wie Extinctionscurve keine sozusagen in die Augen springende Fernwirkung zugesteht.

1) Ketteler, Theor. Optik. p. 112 u. 559.

Anders verhalten sich die Formeln Hrn. v. Helmholtz.¹⁾ Wie insbesondere Hr. Wüllner²⁾, an dessen Arbeit die Ausführungen Brühl's sich anschliessen, dargethan hat, führen die von Helmholtz erhaltenen beiden Bedingungengleichungen der Integration:

$$\nu^2 - \kappa^2 - 1 = -P\lambda^2 + \frac{Q\lambda^4(\lambda^2 - \lambda_m^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2\lambda^2}, \quad 2\nu\kappa = \frac{Qg\lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2 + g^2\lambda^2},$$

bei Vergleichung mit der Erfahrung an durchsichtigen Medien stets zu der genäherten Gleichheit von P und Q . In der experimentell geprüften Gleichung:

$$(II) \quad \nu^2 - 1 = (Q - P)\lambda^2 + \frac{Q\lambda_m^2}{1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}},$$

ist also das erste Glied der rechten Seite immer eine sehr kleine (bald positive, bald negative) Grösse. Nach der v. Helmholtz'schen Theorie gilt indes vorstehende Beziehung nur für $Q < P$ oder $Q = P$ und zwar von einer gewissen Entfernung vom (im Ultraviolett angenommenen) Absorptionsmaximum an bis zu einer gewissen endlich grossen Wellenlänge, sofern nämlich für $\lambda = \infty$ eventuell auch $\nu_\infty = \infty$ wird.³⁾ Und da andererseits für $\lambda = 0$ der untere

1) v. Helmholtz, Pogg. Ann. **154**. p. 582. 1874.

2) Wüllner, Wied. Ann. **17**. p. 580. 1882. Experimentalphysik, 4. Aufl. **2**. p. 119 u. 159.

3) Es war in meinem Buche (p. 71) die Absicht, die Differentialgleichungen Hrn. v. Helmholtz', welche bekanntlich für Aether- und Körpertheilchen die Form haben:

$$u \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2 \xi}{dz^2} - b(x - \xi),$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -a^2 x - \gamma^2 \frac{dx}{dt} + b(x - \xi),$$

unter der offenbar möglichen doppelten Annahme $b = \pm \beta^2$ zu erörtern, doch ist durch ein Versehen nur der Fall $b = +\beta^2$ vollständig durchgeführt, während Hr. v. Helmholtz selbst von der Annahme $b = -\beta^2$ ausgeht. Im ersteren Falle folgt: $\nu_\infty = \infty$, $\alpha_\infty = 0$, im zweiten haben (vgl. Pogg. Ann. **154**. p. 593) ν_∞ und α_∞ endliche Werthe. Doch ist zu bemerken, dass für die strenge Wüllner'sche Bedingung $P = Q$, identisch mit $a^2 = 0$, sich wie im Text erwähnt wurde, ebenfalls die Werthe ergeben: $\nu_\infty = \infty$, $\alpha_\infty = 0$, ein endliches g vorausgesetzt.

Grenzwert $\nu_0 = 1$ wird, so gibt es beiderseits Fernwirkungen mit stark entwickelten Krümmungen.

Sofern übrigens der Autor die gegenwärtig meist zugestandene Gleichheit zwischen intermolecularem und äusserem Aether nicht unter die Voraussetzungen aufgenommen, sondern dahingestellt sein lässt, so ist in diesem Sinne ν^2 ($= \epsilon^2/\mu \cdot 1/c^2$) durch ν^2/n^2 zu ersetzen, sodass kommen würde:

$$\nu^2 - n^2 = -k'\lambda^2 + \frac{R\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

oder auch:
$$\nu^2 = -k'\lambda^2 + a'^2 + \frac{M'}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Für denjenigen also, welcher eine Verschiedenheit des inneren und des Weltäthers mit den Reflexions- und Aberrationserscheinungen für verträglich hält, führen sonach beide Theorien wenigstens für die in der Natur zugänglichen durchsichtigen Medien zu identischen Formeln.

Indes auch unabhängig von der erwähnten Vorstellung lässt sich, wie Hr. v. Helmholtz bereits selbst angedeutet, obige Gleichung (II) bei ihrer Anwendung auf Medien mit etwa zwei Absorptionsgebieten auf die Gestalt bringen:

$$\nu^2 - 1 = -(k' + k'')\lambda^2 + \frac{R'}{1 - \frac{\lambda'^2}{\lambda^2}} + \frac{R''}{1 - \frac{\lambda''^2}{\lambda^2}},$$

und hier genügt offenbar die Vernachlässigung der sehr klein gedachten Constanten λ'_m , um abermals auf die Formen (I) zu stossen.

Wenn wir also diese letzteren einer umfassenden numerischen Prüfung unterziehen, so lassen sich die gewonnenen Zahlencoefficienten einstweilen nicht weiter zerlegen, und so wird der Schwerpunkt der Untersuchung vornehmlich in der Beantwortung der Frage liegen, wieviel und welche Constanten der Reihe (I) zur genauen Darstellung des Beobachtungsmaterials erforderlich sind.

Dasselbe bezieht sich zur Zeit in grosser Ausdehnung auf die calorische, optische und chemische (resp. Fluorescenz erregende) Strahlung. Wie ich an anderem Orte¹⁾ gezeigt

1) Ketteler, Theor. Optik, p. 554. Vgl. insbesondere Fig. 43.

habe, sind nun zwar für die Darstellung des ganzen erwähnten Intervalles die sämtlichen vier Glieder der Reihe notwendig und ausreichend, doch kommt man, wenn man sich auf die Darstellung eines nur partiellen Intervalles beschränkt, auch schon mit einer geringeren Gliederzahl aus. Fassen wir etwa mittlere Dispersionen (Quarz, Kalkspath etc.) in's Auge, so dürften meiner Erfahrung nach wohl folgende Verhältnisse zutreffen:

1) Die abgekürzten Cauchy'schen Reihen:

$$n^2 = a^2 + \frac{M}{\lambda^2}, \quad n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

welche (was mutatis mutandis auch bezüglich der folgenden übrigen gilt) empirisch einander gleichwerthig sind, haben ebenso wie die unwesentlich verschiedene Lommel'sche Formel:

$$n^2 - 1 = \frac{C}{1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}},$$

ihren ungefähren Geltungsbereich zwischen den Fraunhofer'schen Linien *G* und *R*, resp. Wellenlängen (in Tausendstelmmillimetern) 0,43—0,32. Beobachtete und berechnete Curven haben zwei Punkte mit einander gemein.

2) Die Formel:

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2,$$

welche passend die calorische heisse, gilt von den von Mouton und Langley benutzten extremen Punkten des Wärmespectrums bis zu dem Inflexionspunkte der Dispersionscurve in der Nähe von *A*, also zwischen den Wellenlängen 2,4—0,76. Auch hier berühren sich beobachtete und berechnete Curve in zwei Punkten.

3) Die Formeln:

$$n^2 - 1 = -k\lambda^2 + \frac{C}{1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}},$$

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{M}{\lambda^2},$$

deren erste ich die Wüllner'sche (Hr. Brühl nennt sie die v. Helmholtz'sche), und deren zweite ich die Redtenbacher'sche nennen will, ermöglichen die Darstellung des

Spectrums von der bis jetzt bekannten ultrarothten Grenze bis gegen R .

4) Die dreiconstantige Cauchy'sche Reihe:

$$n^2 = a^2 + \frac{M}{\lambda^2} + \frac{N}{\lambda^4},$$

ist anwendbar etwa zwischen der Linie G und der von Sarasin, Cornu und Mascart bisher erreichten ultravioletten Grenze, also zwischen den ungefähren Wellenlängen 0,43—0,18. Hier wie unter 3) stossen beobachtete und berechnete Curve in drei Punkten zusammen.

5) Für die vollständigen Formeln endlich:

$$(I) \quad n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

$$(I_b) \quad n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{M}{\lambda^2} + \frac{N}{\lambda^4},$$

gültig zwischen den beiden extremen Wellenlängen 2,4—0,18, haben beide Curven vier Punkte gemein.¹⁾

Demnach würden in den aufgeführten fünf Fällen die jedesmaligen Constanten durch solche Beobachtungswerthe zu ermitteln sein, welche die Constanten in ihrer individuellen Wirkungsweise möglichst charakterisiren. Das dürften beispielsweise für die vollständige Curve (vgl. die unter folgenden Tabellen für Flussspath, Quarz und Kalkspath) Spectralörter von folgender Lage sein: $\lambda = 1,7 = 0,60 = 0,34 = 0,20$.

Wenn freilich die Dispersion eine so beträchtliche ist, wie beim Schwefelkohlenstoff, und man sich nicht mit vier Decimalen begnügt, so können selbst innerhalb des kurzen optischen Spectrums alle vier Constanten nothwendig werden. Vgl. darüber unten Tab. I.

Bei der hier vorgetragenen Auffassungsweise haben natürlich die Hrn. Brühl vielfach beschäftigenden Fragen bezüglich Extrapolation und Intrapolation eine nur untergeordnete

1) Von der Richtigkeit der vorstehenden Regeln überzeugt man sich, wenn man z. B. für das vollständige Kalkspathspectrum die vier zusammengehörigen Summanden der einzelnen Brechungsverhältnisse tabellarisch zusammenstellt. Für die oben besprochenen Einzelpartien lassen sich dann einzelne Glieder als unwesentlich streichen, andere in einen constanten Mittelwerth zusammenziehen.

Bedeutung. Während in der That Hr. Brühl, wie auch früher Hr. Langley, die Extrapolationen meistens misslungen sind, befriedigen, wie ich alsbald zeigen werde, die mit mehr Vorsicht von mir vorgenommenen in jedem einzelnen Falle.

Ein wesentliches Moment endlich, welches speciell für die Constantenberechnung von durchschlagendem Einfluss ist, betrifft das „Gewicht“ oder die Zuverlässigkeit der hierzu ausgewählten Beobachtungspaare (n, λ), und hier sind selbstverständlich Fehler der Wellenlängen nicht minder zu vermeiden, wie fehlerhafte Indices. Beide kennen wir zunächst mit grösster Sicherheit zwischen den Fraunhofer'schen Linien a und H .

Was das ultraviolette Spectrum betrifft, so sind nach den Angaben der oben genannten Forscher (abgesehen von den Drehungswinkeln der Rotationspolarisation des Quarz) die bezüglichen Indices leichter zu ermitteln als die Wellenlängen. Rationell also würde man gerade diese letzteren aus den Dispersionsgleichungen ableiten können. Jedenfalls sind die bezüglichen n und λ um so weniger genau, als sie sich den bisher beobachtbar gewesenen Extremwerthen nähern.¹⁾ Dazu kommt insbesondere für Kalkspath, dass nach Hr. Sorret und Sarasin bereits die Linie Cd. 26 an der Grenze der Durchgängigkeit desselben liegt, in ihrer Nähe also nur mehr unsichere Indices zu erwarten sind.

Aehnliches gilt selbstverständlich vom ultrarothem Spectrum (einschliesslich der Linie A). Wenn hier gelegentlich Hr. Brühl selbst auf die Schwierigkeit der Messungen für die extreme Wellenlänge 2,8 hinweist, so hat er doch andererseits kein Bedenken getragen, die bezüglichen, von Hr. Langley nur beiläufig erwähnten Zahlen in die werthvolle Flintglastabelle desselben aufzunehmen.

Wenn nun derartige, mit Fehlern behaftete Werthpaare (n, λ) zur Berechnung der Constanten verwandt werden, so werden diese begreiflicher Weise um so genauer, je weiter

1) Vgl. z. B. die Angabe der wahrscheinlichen Fehler seitens Mascart, Ann. de l'Écol. Norm. 4. p. 7. 1867 u. Compt. rend. 64. p. 454. 1867.

jene Werthpaare im Spectrum auseinander liegen. Es hat daher keinen rechten Sinn, wenn Hr. Brühl z. B. für die auf vier Decimalen abgerundeten Brechungsverhältnisse des Cassiaöles die Constanten der viergliedrigen Formel mittelst der Beobachtungspaare für die Linien *D, F, G, H* berechnet, obwohl das Intervall *B—H* zur Verfügung steht, und *F, G, H* unmittelbar aufeinander folgen. Hier wäre wenigstens ein vorgängiges Construiren der Beobachtungsreihe in nicht zu kleinem Maassstabe erforderlich gewesen, um so graphisch die etwa mehrere Einheiten der vierten Decimale betragenden Zickzacksprünge auf mindestens eine halbe Einheit zu reduciren.

Andererseits wird es denn auch nicht befremden, dass für einen kurzen Spectralabschnitt unsicher ermittelte vier Constanten erheblich weniger leisten, als drei oder selbst zwei Constanten, wenn deren Glieder zweckentsprechend ausgewählt sind. Leider hat Hr. Brühl den Einfluss, den diese einzelnen Glieder auf das Gesamtergebn ausüben, wohl schwerlich genügend berücksichtigt, als er p. 275 seine Berechnung der Indices des Quarz mittelst der drei- und vierconstantigen Reihe in Angriff nahm. Er ermittelt nämlich die Constanten der ersteren aus den Spectralörtern: Ultraroth Linie *B, R*, die der letzteren aus den nämlichen Oertern und der willkürlich zugezogenen, hart an *B* nach *R* zu gelegenen Linie *F*, und wundert sich schliesslich, dass die Extrapolation im extremen ultravioletten Felde (von *R* bis *A1 32*), welche in beiden Fällen ungenügend ausfällt, für die vierconstantige Reihe am schlechtesten ist. Selbstverständlich ist doch die vierte Constante recht eigentlich dazu da, um die ultraviolette Grenze der angewandten dreiconstantigen (Wüllner'schen) Reihe beträchtlich weit hinauszuschieben. Daher musste statt *F* irgend eine zuverlässig bestimmte Cadmium-, Zink- oder Aluminiumlinie herangezogen werden. Wenn dabei die Refractionscurve als eine Curve gedacht wird, deren Abscissen die λ sind, so ist wohl nicht erwogen, dass die nämlichen Constanten auch die Wellenlängencurve bestimmen, deren Abscissen die n sind. In der That bezeichnet Hr. Brühl eine früher von Langley

vorgenommene Extrapolation für die grosse Wellenlängendifferenz 1,596 (neben der kleinen Indicesdifferenz 0,0236) als eine enorme, während ihm selbst die an der erwähnten Quarzreihe vorgenommene trotz der grossen Indicesdifferenz 0,1013 (neben der kleinen Wellenlängendifferenz 0,124) gar nicht anstössig vorkommt.

Endlich ist zu bemerken, dass alle von Hrn. Brühl benutzten Formeln doch nur Abrundungen theoretischer Ausdrücke sind, welche ihres approximativen Charakters wegen schliesslich um so mehr im Stiche lassen, als sich der Einfluss der der Theorie zu Grunde gelegten Absorptionsgebiete bemerkbar macht. In diesem Falle muss man eben zu den strengen Formeln zurückgehen.

Was übrigens das bei meinen eigenen Rechnungen benutzte Ausgleichungsverfahren betrifft, so ist dasselbe viel einfacher, als Hr. Brühl wohl annimmt. Nachdem vier einzelne, weit voneinander abstehende, zuverlässige Beobachtungspaare zur Constanten-Berechnung benutzt waren, änderte man die letzten Ziffern derselben so lange gegeneinander ab, als sich die Gesammtheit der Fehler dadurch zu vermindern schien. Beispielsweise genügte bei der Schwefelkohlenstoffreihe (s. u. Tab. I.) die blosse Herabminderung des Anfangswerthes von a um eine Einheit der fünften Decimale, um die Summe der Fehlerquadrate bedeutend zu reduciren.

Wenn ich nach diesen Vorbemerkungen einige von Hrn. Brühl und mir durchgeführte Rechnungen folgen lasse, so glaube ich zunächst auf die nur vier Beobachtungen (für die drei Wasserstofflinien und die Natriumlinie) umfassenden Brühl'schen Reihen für Benzoylchlorid, Zimmtalkohol, Anilin, Furfurol, zimmtsäures Aethyl und Zimmtaldehyd, ferner auf die nur sieben Fraunhofer'sche Linien umfassende Baden-Powell'sche Reihe für das stark dispergirende Cassiaöl und die ähnliche Gladstone'sche Reihe für die Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff verzichten zu sollen, zumal die beiden letzten die Indices nur auf vier Decimalstellen angegeben.

Dagegen theile ich in Tab. I und II. zunächst meine Rechnungen mit für Schwefelkohlenstoff und Wasser, Flüssig-

keiten, die trotz ihres interessanten Verhaltens von Hrn. Brühl nicht erwähnt sind. Die Einrichtung der Tabellen, welchen die Beobachtungen von der Willigen's¹⁾ zu Grunde gelegt sind, bedarf keiner Erklärung.

Tabelle I.
Schwefelkohlenstoff.

$$k = 0,005\,508$$

$$a^2 = 2,517\,58$$

$$D = 0,847\,91$$

$$\lambda_m^2 = 0,048\,560$$

Tabelle II.
Wasser.

$$K = 0,01280$$

$$a^2 = 1,76220$$

$$D = 0,4125$$

$$\lambda_m^2 = 0,01540$$

Spectral- linie	λ	n beob.	n ber.	δ	n beob.	n ber.	δ
$A \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha \end{matrix} \right.$	0,76340	—	—	—	1,32889	1,32889	0
a	0,76092	1,609 95	1,609 92	+ 3	—	—	—
B	0,71896	1,613 16	1,613 22	- 6	1,32976	1,32975	+1
C	0,68718	1,616 15	1,616 17	- 2	1,33038	1,33043	-5
D	0,65656	1,619 45	1,619 46	- 1	1,33113	1,33115	-2
E	0,58954	1,628 89	1,628 86	+ 3	1,33298	1,33299	-1
F	0,52720	1,641 74	1,641 76	- 2	1,33522	1,33523	-1
G	0,51728	1,644 36	1,644 36	0	1,33566	1,33565	+1
H	0,48640	1,653 79	1,653 80	- 1	1,33713	1,33712	+1
I	0,45344	1,666 97	1,666 87	+10	1,33902	1,33902	0
J	0,43116	1,678 18	1,678 15	+ 3	1,34057	1,34055	+2
K	0,42288	1,682 95	1,683 00	- 5	1,34118	1,34118	0
L	0,41040	1,691 15	1,691 14	+ 1	1,34220	1,34221	-1
M	0,39715	1,701 12	1,701 09	+ 3	1,34343	1,34344	-1

Es ist bemerkenswerth, dass die starke Zerstreuung des Schwefelkohlenstoffs nicht etwa von der auffallenden Grösse seiner Dispersivkraft D , sondern von der verhältnissmässigen Nähe seines Absorptionsgebietes herrührt. Während für denselben die Constante k einen auffallend kleinen Werth hat, erreicht sie dagegen für Wasser einen ungewöhnlich hohen Betrag.

Die folgende Tabelle III enthält die mehrfach erwähnte

1) van der Willigen, Mémoires de physique 3. p. 70. 1870; Archives des Musées Teyler, 1. fasc. 3. p. 182. 1868. Vergl. Ketteler, Th. Opt. p. 542

Beobachtungsreihe Langley's¹⁾ an Flintglas, welche neben der optischen namentlich die ultraroth Strahlung umfasst, indes der Schwierigkeit der bolometrischen Bestimmungen wegen die Indices nur für vier Decimalen aufführt.

Tabelle III.

Flintglas.

$$k = 0,009\ 076$$

$$D = 0,607\ 14$$

$$\alpha^2 = 2,441\ 37$$

$$\lambda_m^2 = 0,029\ 929$$

Spectral- linie	λ	n beobachtet	n berechnet	δ
	2,356	1,5478	1,5472	+6
	2,090	1,5511	1,5511	0
	1,767	1,5549	1,5546	+3
	1,658	1,5562	1,5566	-4
	1,200	1,5625	1,5624	+1
	1,010	1,5654	1,5654	0
<i>A</i>	0,7601	1,5714	1,5714	0
<i>C</i>	0,6562	1,5757	1,5757	0
<i>D₁</i>	0,5889	1,5798	1,5797	+1
<i>b₄</i>	0,5167	1,5862	1,5861	+1
<i>F</i>	0,4861	1,5899	1,5897	+2
<i>H₁</i>	0,3968	1,6070	1,6070	0
<i>O</i>	0,3440	1,6266	1,6266	0

Die Tabelle ist von mir berechnet²⁾; sie stimmt in ihren Resultaten mit der entsprechenden, von Hrn. Brühl neu berechneten Tabelle 9 auf p. 272 völlig überein.³⁾

Man erkennt aus derselben, dass das erste Glied unserer Dispersionsformel nicht bloß nothwendig, sondern vorläufig auch noch ausreichend ist.

Unter den Stoffen, deren Spectrum besonders im ultravioletten Theile durchmessen ist, erwähne ich zunächst den Flussspath. In Tabelle IV sind die aufgeführten Wellen-

1) Langley, Wied. Ann. 22. p. 598. 1884.

2) Ketteler, Theor. Optik p. 544.

3) Wollte man das gelegentlich von Langley erwähnte unsichere Beobachtungspaar $\lambda = 2,8$; $n = 1,5435$ hinzufügen, so ergäbe die Rechnung: $n = 1,540^?$, und sonach $\delta = +32$. — Selbstverständlich gibt für dieses Flintglas bis *H* hin auch eine dreiconstantige Formel gute Resultate, für *O* steigt dann die Abweichung bei den Brühl-Wüllner'schen Constanten auf +24.

längen von Hrn. Cornu¹⁾, die Brechungsindices von Hrn. Sarasin²⁾ bestimmt.

Tabelle IV.
Flussspath.

$$k = 0,004\ 878 \quad D = 0,623\ 71$$

$$a^2 = 2,040\ 20 \quad \lambda_m^2 = 0,009\ 570$$

Spectral- linie	λ	n beobachtet	n berechnet	δ
<i>A</i>	0,7604	1,43101	1,43104	- 3
<i>a</i>	0,71836	1,43157	1,43159	- 2
<i>B</i>	0,68671	1,43200	1,43206	- 6
<i>C</i>	0,65618	1,43257	1,43257	0
<i>D</i>	0,58920	1,43394	1,43394	0
<i>F</i>	0,48607	1,43705	1,43714	- 9
<i>h</i>	0,41012	1,44121	1,44118	+ 3
<i>H</i>	0,39681	1,44214	1,44215	- 1
Cd 9	0,36090	1,44535	1,44535	0
10	0,34655	1,44697	1,44693	+ 4
11	0,34015	1,44775	1,44771	+ 4
12	0,32525	1,44987	1,44973	+14
17	0,27467	1,45958	1,45960	- 2
18	0,25713	1,46476	1,46473	+ 3
23	0,23125	1,47517	1,47507	+10
24	0,22645	1,47762	1,47752	+10
25	0,21935	1,48150	1,48149	+ 1
26	0,21441	1,48462	1,48457	+ 5
Zn 27	0,20988	1,48765	1,48765	0
28	0,20610	1,49041	1,49044	- 3
29	0,20243	1,49326	1,49333	- 7
Al 30	0,19881	1,49629	1,49641	-12
31	0,1931	1,50205	1,5017.9	+26
32	0,1856	1,50940	1,5099.5	-55

Charakteristisch für dieselbe ist das starke Wachsthum der Indices im äussersten Ultraviolett. Die Differenz der extremen Brechungsexponenten beträgt 0,0784, die zugehörigen Wellenlängen verhalten sich wie 4,1 zu 1. Meines Erachtens dürfte die Uebereinstimmung von Beobachtung und Rechnung selbst für die schwierigen beiden letzten Bestimmungen noch als befriedigend gelten.

Das nun folgende Spectrum des ordinären Strahles des

1) Cornu, Ann. de l'Ecole Norm. (2) **3.** und **4.** Archiv des sc. phys. **2.** p. 119. 1879.

2) Sarasin, Archiv. des sc. phys. (3) **10.** p. 303. 1883. Vgl. Ketteler, Theor. Opt. p. 543.

Quarz (das des extraordinären ist wenig verschieden) zeichnet sich nach beiden Enden hin durch grosse Vollständigkeit aus. Der ultraroth Theil rührt von Mouton¹⁾ her, die übrigen Wellenlängen sind von Cornu, die Indices von Sarasin.²⁾ Ich habe dieselben zunächst einer Arbeit der Hrn. Soret und Sarasin³⁾ über die Rotationspolarisation des Quarz entnommen, welche die Reihe mit *Cd. 26* abbricht, und füge die Zink- und Aluminiumlinien jetzt neu hinzu.⁴⁾ Hr. Sarasin sagt von ihnen, dass die mit den letzteren erhaltenen Werthe wenig genau seien, und dass bei den anderen Linien die Brechungsindices bis auf eine Einheit der vierten Decimale richtig sein dürften. (S. Tab. V auf folgender Seite.)

Da bei der Berechnung der vier Constanten nur das Intervall *A - Cd 26* berücksichtigt ist, so ist nach Ausweis der Differenzcolumnne δ die spätere Extrapolation des ultrarothens wie des ultravioletten Endabschnittes sehr befriedigend gelungen. Insbesondere haben die beiden letzten Abweichungen dieselbe Grösse wie in der Flussspathtabelle und, wie dort, entgegengesetztes Vorzeichen.

Die Differenz der extremen Indices beträgt 0,1559, die zugehörigen Wellenlängen stehen in dem Verhältniss 11,5:1.

In die Tabelle ist schliesslich, den Rechnungen Hrn. Brühl's entsprechend, die δ' überschriebene Columnne neu aufgenommen. Dieselbe bezieht sich auf die Differenzen zwischen den beobachteten und den nach der Formel Wüllner's (II) berechneten Indices. Für letztere haben die drei Constanten die Werthe (Längeneinheit = 1 Zehntausendstelmillimeter):

$$k = P - Q = 0,000\ 102, \quad Q = 1,600\ 911, \quad \lambda_m^2 = 0,84552.$$

Bemerkungen über dieselbe hinzuzufügen, ist wohl unnöthig.

1) Mouton, *Compt. rend.* 88. p. 1078 und 1189. 1879.

2) Sarasin, *Compt. rend.* 85. p. 1230. 1877. *Arch. des sc. phys.* 66. p. 109. 1878.

3) Soret und Sarasin, *Arch. des sc. phys.* 8. p. 5. 79. 201. 1882.

4) Vgl. Ketteler, *Theor. Opt.*, p. 545.

Tabelle V.

Quarz. Ordinärer Strahl.

$k = 0,01113$

$D = 1,00254$

$a^2 = 2,35681$

$\lambda_m^2 = 0,010627$

Spectral- linie	λ	n beobacht.	n berechnet	δ	δ'
	2,14	1,5191	1,51926	-16	-50
	1,77	1,5247	1,52490	-20	-20
	1,45	1,5289	1,52921	-31	0
	1,08	1,5338	1,53396	-16	+30
	0,88	1,5371	1,53693	+17	+68
A	0,7603	1,53902	1,53918	-16	+27
a	0,7184	1,54019	1,54016	+3	—
B	0,6867	1,54099	1,54098	+1	+38
C	0,6562	1,54188	1,54188	0	+35
D	0,5892	1,54419	1,54423	-4	+26
E	0,5269	1,54718	1,54714	+4	+15
F	0,4861	1,54966	1,54964	+2	0
G	0,4307	1,55429	1,55423	+6	-17
H	0,3968	1,55816	1,55809	+7	-31
L	0,38196	1,56019	1,56012	+7	-38
M	0,37262	1,56149	1,56152	-3	-51
Cd 9	0,36090	1,56348	1,56348	0	—
N	0,35818	1,56400	1,56395	+5	-58
Cd 10	0,34655	1,56617	1,56615	+2	—
O	0,34406	1,56668	1,56665	+3	-66
Cd 11	0,34015	1,56744	1,56747	-3	—
P	0,33600	1,56842	1,56836	+6	-65
Q	0,32858	1,5700	1,57006	-6	-80
Cd 12	0,32470	1,57094	1,57101	-7	—
R	0,31798	1,57290	1,57273	+17	-72
Cd 17	0,27467	1,58750	1,58757	-7	-107
" 18	0,25713	1,59624	1,59627	-3	-104
" 23	0,23125	1,61402	1,61396	+6	-60
" 24	0,22645	1,61816	1,61812	+4	-50
" 25	0,21935	1,62502	1,62496	+6	-21
" 26	0,21431	1,63040	1,63037	+3	0
Zn 27	0,20988	1,63569	1,63557	+12	+24
" 28	0,20610	1,64041	1,64022	+19	+57
" 29	0,20243	1,64566	1,64541	+25	+94
Al 30	0,19881	1,65070	1,65077	-7	+98
" 31	0,1931	1,65990	1,66011	-21	+155
" 32	0,1856	1,67500	1,67438	+62	+364

Da die Dispersion des Quarz noch immerhin schwach ist, so wurde Hr. Brühl, welcher übrigens ohne Erwähnung meiner Rechnungen die mittleren Spalten der letzten Tabelle durch von ihm ausgeführte neue (vgl. über deren Qualität das oben p. 306 Gesagte) ersetzt, „auf den Gedanken gebracht,

dass bei stärkerer Dispersion die vorhandenen Formeln sich noch weniger bewähren und dann auch zur Interpolation als unbrauchbar erweisen würden.“

Ein treffliches Object zur Prüfung dieser Vermuthung bietet nun der ordinäre Strahl des Kalkspaths (der extraordinäre kommt nicht in Betracht), dessen Brechungsverhältnisse durch Mascart's¹⁾ und Sarasin's²⁾ Messungen zwischen den Fraunhofer'schen Linien *A* und *Cd* 26 bekannt sind.

Ich habe das Kalkspathspectrum schon vor Jahren³⁾ nach Mascart's Angaben zwischen den Sonnenlinien *A* und *R* in mehrfacher Weise berechnet. Als dann später Mascart die ultraviolette Grenze desselben durch Zuziehung der Cadmiumlinien erweiterte, habe ich mit Benutzung der sichereren Cornu'schen Wellenlängen den Versuch gemacht, auch deren Gebiet in die Rechnung einzuschliessen. Ueber diesen bisher nicht publicirten Versuch wurde bereits anderswo⁴⁾ bemerkt, dass in dieser Region der Strahlung die Absorption des Kalkspaths recht merkbar werde, und dass wohl infolge dessen die Bestimmung der Indices verhältnissmässig ungenau ausgefallen sei. Thatsächlich fügen sich diejenigen Indices der Cadmiumlinien, welche zwischen die erwähnten Sonnenlinien fallen, der auf letztere bezüglichen Tabelle nur ungenügend ein.

Hr. Brühl selbst hat für seine Rechnungen die erst später bekannt gewordenen Sarasin'schen Brechungsverhältnisse der Cadmiumlinien verwerthet. Da dieselben für genauer gelten dürfen, so bedaure ich, sie nicht früher gekannt zu haben. Ich habe mich indes trotz der Wichtigkeit, die Hr. Brühl der Kalkspathreihe zugelegt, nicht entschliessen können, die Last einer völligen Umrechnung auf mich zu nehmen. In der hier folgenden letzten Tabelle VI enthält die Columnne der λ wieder die Cornu'schen Daten. Die folgenden beiden Columnnen enthalten die beobachteten

1) Mascart, Ann. de l'Ecole Norm. 1. p. 263. 1864. Ebend. 4. p. 7. 1867.

2) Sarasin, Arch. des sc. phys. 8. p. 392. 1882.

3) Ketteler, Pogg. Ann. 140. p. 10. 1870. Theor. Op. p. 540.

4) Ebendas. p. 541.

Brechungsverhältnisse n , welche Hr. Sarasin mittelst zweier verschiedener Prismen erhalten hat. Zur Vergleichung folgen dann die entsprechenden Zahlen Mascart's.

Tabelle VI.
Kalkspath. Ordinärer Strahl.

$$k = 0,02058$$

$$D = 0,98358$$

$$a^2 = 2,70026$$

$$\lambda m^2 = 0,01918$$

Spectral- linie	λ	n nach Sarasin 1. Prisma	n nach 2. Prisma	n nach Mascart	n berechn.	δ	δ''
<i>A</i>	0,7604	1,65000	1,64983	1,65013	1,64989	+ 24	0
<i>a</i>	0,71836	—	—	1,65162	1,65155	+ 7	—
<i>B</i>	0,68671	—	—	1,65296	1,65295	+ 1	— 79
<i>C</i>	0,65621	—	—	1,65446	1,65446	0	— 94
<i>D</i>	0,58921	1,65839	1,65825	1,65846	1,65850	— 4	— 109
<i>E</i>	0,52691	—	—	1,66354	1,66359	— 5	— 95
<i>F</i>	0,48607	1,66783	1,66773	1,66793	1,66803	— 10	— 77
<i>G</i>	0,43073	—	—	1,67620	1,67627	— 7	— 30
<i>H</i>	0,39681	1,68319	1,68321	1,68330	1,68329	+ 1	0
<i>L</i>	0,38196	—	—	1,68706	1,68705	+ 1	+ 11
<i>M</i>	0,37262	—	—	1,68966	1,68969	— 3	+ 16
Cd 9	0,36090	1,69325	1,69310	1,69349	1,69335	+ 14	—
<i>N</i>	0,35818	—	—	1,69441	1,69426	+ 15	+ 22
Cd 10	0,34655	1,69842	1,69818	1,69827	1,69845	— 18	—
<i>O</i>	0,34406	—	—	1,69955	1,69941	+ 14	+ 23
Cd 11	0,34015	1,70079	—	1,70103	1,70098	+ 5	—
<i>P</i>	0,33600	—	—	1,70276	1,70271	+ 5	+ 13
<i>Q</i>	0,32858	—	—	1,70613	1,70602	+ 11	+ 13
Cd 12	0,32470	1,70764	—	1,70779	1,70787	— 8	—
<i>R</i>	0,31798	—	—	1,71155	1,71127	+ 28	0
Cd 17	0,27467	1,74151	1,74166	1,74160	1,74184	— 24	— 174
" 18	0,25713	1,76050	1,76060	1,76078	1,76092	— 14	— 264
" 23	0,23125	1,80248	1,80272	1,80247	1,80256	— 9	— 286
" 24	0,22645	1,81300	1,81291	1,81315	1,81299	+ 16	— 253
" 25	0,21935	1,83090	1,83091	(1,82460)	1,83065	+ 25	— 147
" 26	0,21441	1,84580	1,84592	—	1,84484	+ 102	0

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass die Uebereinstimmung zwischen Mascart und Sarasin innerhalb des sichtbaren Spectrums befriedigt, dass sich aber für die kürzeren Wellenlängen doch ziemlich erhebliche Differenzen bemerkbar machen. Da auch Hr. Brühl constatirt, dass Mascart's Angaben für Cd 25 soweit von denen Sarasin's abweichen, dass beide Beobachter eine andere Linie untersucht zu haben scheinen, so habe ich die eigentliche Tabelle mit Cd 24 abgebrochen. Unterhalb des Hori-

zontalstriches sind dann die Angaben für Cd 25 und Cd 26 ergänzt worden. Bezüglich der letzteren Linie, welche nur mehr von Sarasin allein beobachtet ist, wurde schon oben angeführt, dass dieselbe an der Grenze der Durchgängigkeit des Kalkspaths liege.

Wie unter solchen Verhältnissen die Constantenberechnung zu handhaben war, bedarf wohl keiner Auseinandersetzung. In der That ergibt die Columnne δ , welche sich auf die von mir berechneten weniger genauen Angaben Mascart's bezieht, Werthe, wie sie für den ganzen Verlauf der Tabelle, zwischen A und Cd 24 nach den obigen Bemerkungen geradezu erwartet werden mussten.

Bezüglich der beiden letzten (Sarasin'schen) Indices ist die Differenz für Cd 25 noch ohne Zweifel befriedigend, während wohl für Cd 26 trotz der zufälligen Uebereinstimmung in den Columnen 3 und 4 (Mittelwerth: 1,84586) keine sichere Bestimmung mehr möglich gewesen ist.¹⁾ Nach Mascart ergäbe sich für Cd 25 die Differenz $\delta = -630$.

Hr. Brühl dagegen benutzt im Anschluss an die bessere Sarasin'sche Reihe für die Constantenermittlung die vier Spectralörter A, H, R und Cd 26 (und ähnlich für die hier nicht weiter zu erörternde dreiconstantige Wüllner'sche Formel die Linien A, R und Cd 26), ohne Unterschieden im Gewicht und den besprochenen Verdachtsmomenten Rechnung zu tragen. Es wird daher nicht Wunder nehmen, wenn die mit solchen Constanten berechneten Indices mit der Beobachtung so wenig stimmen, dass die Differenzen, die wir als δ'' in der letzten Columnne aufgeführt haben, eine geradezu unerträgliche Höhe erreichen.

Damit werden denn die in der Einleitung aufgeführten, weittragenden Schlussfolgerungen Hrn. Brühl's hinfällig, und darf man als Facit seiner mühsamen Arbeit nur mehr den Nachweis ansehen, dass weder die Cauchy'sche noch die Wüllner'sche Formel zur Darstellung der Dispersionserscheinungen genügt.

1) Wie Theor. Optik p. 643 gezeigt ist, entspricht die Wellenlänge 0,21441 ausserordentlich genau dem bezüglichen Drehungswinkel des Quarz. Vgl. auch Tab. IV und V.

Wenn er als letztes Endziel der Arbeit die Entscheidung der Frage betrachtet, ob und mit welcher Sicherheit der für optisch-chemische Untersuchungen so werthvolle Grenzbrechungsindex n_∞ mittelst der neueren Formeln ermittelt werden könne, so hängt, wie wir gesehen, die Beantwortung derselben sowohl von dem jeweiligen theoretischen Standpunkte, als auch von der Ausdehnung des zur Verfügung stehenden Spectrums ab. Während nach der Theorie von v. Helmholtz $n_\infty = v_\infty$ eventuell nahezu unendlich ist, darf dasselbe nach meinen Annahmen fast völlig mit der Constanten a der Dispersionsformel identificirt werden.¹⁾ Leider verlieren indes die sämtlichen Coëfficienten derselben ihre charakteristische Selbständigkeit, sobald man sich auf kleinere Intervalle beschränkt. Die nicht unbeträchtliche Verschiebung, welche dann eintreten kann, ergibt sich z. B. für Kalkspath aus den folgenden, thatsächlich erhaltenen Daten:

Von A $\left\{ \begin{array}{l} k = 0,01126 \\ a^2 = 2,69428 \\ D = 1,1377 \\ \lambda_m^2 = 0,01735. \end{array} \right.$	Von A $\left\{ \begin{array}{l} k = 0,02058 \\ a^2 = 2,70026 \\ D = 0,9886 \\ \lambda_m^2 = 0,01918. \end{array} \right.$
bis R	bis $Cd\ 26$

Im ersteren System erhielt man $n_\infty = 1,6414$, im letzteren $n_\infty = 1,6432$ und sonach $\delta = 0,0018$, welche nicht unbeträchtliche Differenz allerdings bei der bisher üblichen Bestimmungsweise der Refractionsäquivalente vielfach mag überschritten werden. Jedenfalls darf man hiernach schliessen, dass optisch-chemische Speculationen, welche in Mischungen und Verbindungen die dritte Decimale der zu berechnenden Brechungsverhältnisse sicher stellen sollen, nur mit Vorsicht aufzunehmen sind.

Bonn, im November 1886.

1) Dass die von Hrn. Brühl mehrfach citirte Formel:

$$n^2 - 1 = \frac{A}{\lambda^2 + B} + \frac{C}{\lambda^2 - D}$$

einer doppelten Deutung fähig ist, darüber vgl. Theor. Opt. p. 546.

VII. *Das Krystallrefractoskop,
ein Demonstrationsinstrument; von C. Pulfrich.*

(Hierzu Taf. III Fig. 9.)

Im Anschluss an die vorausgehende Beschreibung eines neuen Totalreflectometers¹⁾, lasse ich ein kleines Instrumentchen folgen, welches die Erscheinungen der Grenzcurven der Totalreflexion an Krystallen objectiv zum Ausdruck bringt. Dasselbe beruht auf demselben Princip, wie das von mir construirte Totalreflectometer, zeichnet sich aber durch Einfachheit und Billigkeit der Herstellung aus.²⁾

Fig. 9 stellt die Anordnung und den Schnitt des Apparates dar.

C ist eine auf drehbarem Stativ ruhende Glasröhre und zur Aufnahme einer stark brechenden Flüssigkeit bestimmt. Das untere Ende ist verschlossen, das obere senkrecht zur Axe abgeschliffen. Auf der aufgekitteten dünnen Metallscheibe (*M*) mit kreisförmigem Ausschnitt in der Mitte ruht ebenfalls aufgekittet eine zweite Glasröhre, die oben durch einen Deckel *D* zu verschliessen ist. Die zu untersuchende Krystallplatte (*K*) bedeckt die Oeffnung der Metallscheibe und ist ringsum von der stärker brechenden Flüssigkeit umgeben.

Lassen wir nun, etwa von links her, Lichtstrahlen streifend in den Krystall eindringen, so projecirt sich ein beträchtliches Stück der Grenzcurve der Totalreflexion auf dem unter dem Apparat angebrachten weissen Papierschirm. Das durch die Grösse der Oeffnung bedingte Lichtbündel tritt unter dem Grenzwinkel e in die Flüssigkeit ein und verlässt den Cylinder unter dem Austrittswinkel i . Beim Drehen des Apparates um seine verticale Axe ändert sich beständig die Lage des Grenzcurvenstückes (welches bei Benutzung von Sonnenlicht als breiter, schöner Farbenbogen sich darbietet), je nach dem Charakter der Krystalle und deren Flächen.

Für Kalkspath und Quarz erhielt ich unter Ein-

1) Pulfrich, Wied. Ann. 30. p. 193. 1887.

2) Das Instrumentchen ist von Hrn. Mechaniker Max Wolz in Bonn zu beziehen.

füllung von Monobromnaphtalin prachtvolle fingerbreite Spectren von einer Curvenlänge von ungefähr 30—40 cm, den die Erscheinung auffallenden Schirm in einer Entfernung von ca. 20—25 cm gehalten.

Auf eine peinliche Verdunkelung des Beobachtungszimmers kommt es bei dieser Beleuchtungsart gar nicht an; es genügt, die Blendläden soweit zu schliessen, dass ein schmales Lichtbündel von Sonnenstrahlen die obere Röhre trifft.

Die Erscheinung umfasst ca. 40° der Totalcurve.

Die in der Figur 9 gezeichneten weiteren Apparatheile, wie Spiegel (*S*) und Metallplatte (*P*), dienen dazu, die Grenzcurve in ihrer Totalität zu zeigen.

Um von allen Seiten in den Krystall streifend einfallende Lichtstrahlen zu erhalten, ist die Metallplatte *P* auf der dem Krystall zugewandten Seite mit einem spiegelnden Konus (*s*) von ca. 45° Neigung versehen. Ein Heliostat wirft die Sonnenstrahlen auf den Spiegel *S*. Der Deckel (*D*) sowie die Metallplatte halten falsches Licht von der Papierscheibe ab.

Die Schärfe und Reinheit der Grenzcurven hängen natürlich von der Form der Krystallplatten und der Güte der unteren Cylinderröhre ab. Was die letztere betrifft, so genügt es für unseren Zweck, eine gut ausgewählte, blasenfreie Glasröhre zu benutzen. Die Krystalle sind am besten in kreisrunden, nicht zu dünnen Platten mit verticalen Begrenzungsflächen zu verwenden. Man vermeidet damit die bei unregelmässigen Krystallplatten auftretenden, durch Dispersion hervorgerufenen Farbencurven, die die eigentliche Erscheinung der Grenzcurven verdecken und nichts mit diesen zu thun haben. — Die unterhalb Fig. 9 gezeichneten Grenzcurven sollen die Erscheinung für eine Kalkspathplatte parallel der Axe zur Anschauung bringen; *r* und *v* bezeichnen die Reihenfolge der Farben von roth nach violett.

Um die entgegengesetzte Polarisation der Grenzcurven zu demonstrieren, hält man unter den Cylinder in den Gang der Lichtstrahlen ein Nicol. Man kann damit abwechselnd das ordinäre wie das extraordinäre Farbenbild zum Verschwinden bringen.

Die Farbenfolge resultirt aus zwei Dispersionen, derjenigen der Flüssigkeit und der des Krystalls, sofern eben die Zu- oder Abnahme des Austrittswinkels i für Strahlen mit abnehmender Wellenlänge λ durch:

$$\sin i_k = \sqrt{N_k^2 - n_k^2} \quad 1)$$

bedingt ist.

Es kann deshalb vorkommen, dass i constant bleibt, oder auch, dass die Farbenfolge vollständig umgekehrt wird, wie ich letzteres für die meisten Flüssigkeiten bei Benutzung des massiven Glascylinders fand.

Wir haben es hier mit einem Farbenspiel zu thun, das seinen Ursprung der verschiedenen Lage der Grenzcurve der Totalreflexion für wechselnde Wellenlängen verdankt; ein eigentliches Spectrum mit Fraunhofer'schen Linien stellt die Erscheinung nicht dar.

Da die Grenzcurven im innigsten Zusammenhange mit der Wellenfläche des Krystalls stehen und ein anschauliches Bild für die reciproken Lichtgeschwindigkeiten in der Krystallfläche selbst geben, so mag das Instrument passend mit dem Namen Krystallrefractoskop bezeichnet werden und als ein Demonstrationsapparat gelten, der die Erscheinungen der Krystallrefraction in leichter und übersichtlicher Weise erkennen lässt und sich dem hübschen „Experiment über Doppelbrechung“ von D. S. Stroumbo²⁾ zur Seite ordnet.

Das von Sénarmont³⁾ schon vor dreissig Jahren erstrebte Ziel, die Erscheinungen der Grenzcurven der Totalreflexion an Krystallen in ihrer Vollständigkeit überschauen zu können, ist somit durch das beschriebene Refractoskop erreicht worden.

Bonn, im November 1886.

1) Vergl. Wied. Ann. **30**. p. 195. 1887.

2) Stroumbo, Compt. rend. **101**. p. 505. 1885; Repertorium der Physik **22**. p. 58. 1886.

3) de Sénarmont, Pogg. Ann. **97**. p. 605. 1856.

VIII. *Ueber die durch kleine electromotorische Kräfte erzeugte galvanische Polarisation;*
von C. Fromme.

(Hierzu Taf. IV Fig. 1–20.)

3. Abhandlung ¹⁾

Die H-O-Polarisation des Palladiums.

Für die im Folgenden mitzutheilenden Versuche über die Polarisation, welche Palladiumelectroden in verdünnter Schwefelsäure durch kleine electromotorische Kräfte erhalten, gelten alle Bemerkungen, welche ich in der Einleitung zu den beiden ersten Abhandlungen, die von der Polarisation des Platins und des Goldes handelten, gemacht habe. Ich erlaube mir deshalb, dorthin zu verweisen, und bemerke nur noch, dass zwei Voltameter gebraucht wurden, das eine (*b*) von der früher beschriebenen Form — Fig. 1 der ersten Abhandlung —, welches evacuirbar war und vier Electroden enthielt, von denen die beiden mittleren polarisirt wurden, und ein zweites (*a*), offen und von trogförmiger Gestalt.

Die Electroden des letzteren (*a*) waren kurze Drähte von 0,1 cm Dicke, die des Voltameters (*b*) Bleche, 1 qcm gross und 0,005 cm dick.

1. Wenn man das luftleere Voltameter durch 1 Daniell polarisirt, so ist, falls die Electroden nur eine geringe anfängliche Polarisation besitzen, die Polarisation der Kathode zuerst beträchtlich grösser als diejenige der Anode. Letztere nimmt aber zu und erstere ab, und nach längerer Zeit ist dann die Hp. kleiner als die Op.

Die Summe beider ist von Anfang an der polarisirenden Kraft merklich gleich.

Die constanten Endwerthe werden um so früher erreicht, je kürzere Zeit seit der letzten Polarisation vergangen ist, je grösser also die von dieser noch restirenden Polarisationen sind.

¹⁾ Die 1. Abh. in Wied. Ann. 29. p. 497. 1886; die 2. Abh. in Wied. Ann. 30. p. 77. 1887.

Das Gleiche gilt auch für das lufthaltige Voltameter, nur beginnt hier die Polarisation der Kathode mit einem viel weniger hohen Werth, und der erreichte Endwerth liegt tiefer, während derjenige der Op. um ebenso viel steigt.

Tab. 1. Im luftleeren Voltameter (*b*) betrugen die durch 1 Daniell erzeugten Polarisationen, die Zeit vom Beginn der Polarisation an gerechnet:

t^{\min}	1	2	4	6	8	10	12	14
H	89,5	—	—	80,5	77,7	—	73,6	72,0
O	—	52,4	56,7	—	—	64,8	—	—

Jetzt wurde auf 6^{min} unterbrochen, und dann von neuem geschlossen:

t^{\min}	1	3	5	7	9	11	13	15
H	74,4	—	69,4	—	68,8	—	67,6	66,8
O	—	68,9	—	70,1	—	71,1	—	—

Es setzte also die Polarisation der Kathode wieder mit einem Werthe ein, welcher etwas grösser, als der bei der vorhergehenden Polarisation erreichte war.

Als nun aber, nach fast vollständigem Verschwinden der Polarisationen Luft in das Voltameter eingelassen war, erhielt man bei neuer Polarisation:

t^{\min}	1	3	5	7	9	11
H	61,6	—	56,0	—	54,7	—
O	—	80,6	—	82,3	—	82,7

Bei wiederholter Evacuirung des Voltameters erhielt man etwas abweichende Werthe für das Verhältniss O/H der nach längerer Polarisation erreichten Polarisationen. Da die bei derselben Evacuirung erhaltenen Werthe immer gut übereinstimmten, so lassen sich die Abweichungen bei verschiedenen Evacuirungen wohl nur durch Unterschiede der kleinen, noch im Voltameter verbliebenen Luftmenge erklären. Der kleinste beobachtete Werth von O/H war 1,03 und der grösste 1,11.

Die mit dem lufthaltigen Voltameter (*b*) beobachteten Werthe schwankten um $O/H = 2$. Daraus kann man schliessen, dass die Evacuirung des Voltameters dann am vollkommensten war, als sich die kleinsten Werthe für O/H ergaben.

Im luftleeren Voltameter fiel die durch 1 Daniell erzeugte Op. bei Einschaltung von $W = 5000$ S.-E. um $O_{0-5000} = 1,3$, während sich die Hp. kaum änderte, $H_{0-5000} = 0$. Im lufthaltigen Voltameter wurde dagegen in verschiedenen Versuchsreihen beobachtet:

$$\begin{array}{rcc} H_{0-5000} & = & 0,9 \quad 1,0 \quad 0,4 \\ O_{0-5000} & = & 0,4 \quad 0,6 \quad 0,6. \end{array}$$

Der Unterschied der Hp. ist durch den Luftzutritt merklich geworden, während derjenige der Op. abgenommen hat.

Bei Polarisirung durch 1 Chromsäureelement waren im luftleeren wie im lufthaltigen Voltameter Hp. und Op. immer nur wenig voneinander verschieden, wobei bald die Hp., bald die Op. die grössere war. Bei längerer Polarisirung nahm die Hp. nur wenig ab und die Op. zu.

Wenn kein Rheostatenwiderstand eingeschaltet war, so wurde die Gesamtpolarisation der polarisirenden Kraft nahe gleich, der Unterschied betrug meist weniger als 2 Proc.

Versuche über die Grösse von H_{0-5000} und O_{0-5000} im luftleeren Voltameter liegen nicht vor. Im lufthaltigen Voltameter nahm bei Einschaltung von $W = 5000$ S.-E. die Polarisation der Kathode um 8,5 und 10,5, die der Anode um 5,0 und 5,6 ab, sodass bei $W = 5000$ die Gesamtpolarisation der electromotorischen Kraft des Elements um etwa 7 Proc. nachstand.

Die Polarisirung durch 1 Chromsäureelement währte bei Luftleere des Voltameters immer nur sehr kurze Zeit, weil es sonst Wochen dauerte, bis die Polarisation der Kathode verschwunden war. Dagegen wurde durch 1 Daniell öfters mehrere Stunden lang polarisirt, ohne dass die Hp. nachher einer so langen Zeit zum Verschwinden bedurft hätte.

Das Verhältniss der Polarisationen, welcher bei beginnender Wirkung eines Chromsäureelementes bereits bestehen, ist auf das Verhältniss der durch das Chromsäureelement erzeugten Polarisationen von einigem Einfluss. Als z. B. $H = 16$, $O = 0$ war, erzeugte das Chromsäureelement die Polarisationen $H = 110,9$, $O = 129,3$. Diese verschwanden in 82^{min} bis auf $H = 80$, $O = 17$. Eine neue Polarisirung durch das Chromsäureelement ergab darauf $H = 114,4$,

O = 17
zweiter
währen
risirun

2.
den de
jener
isolirt
Voltan
sind d

T
1 Dan
im Fo
keinen
gezoge
zum M

t_{\min}
H 70

t_{\min} 30
H 60

t_{\min} 70
H 40

D
an ein
Dann
wächst
mum
Maxim

0,42 L
0,25 D

T
risatio
1 Dan

1)
der Hp

$O = 127,5$. Es war also entsprechend dem schon vor der zweiten Polarisirung grösseren Verhältniss H/O jetzt auch während derselben H/O grösser, als bei der ersten Polarisirung.

2. Von den Beobachtungen, welche über das Verschwinden der Polarisationen angestellt wurden, will ich zuerst diejenigen beschreiben, bei welchen die Electroden voneinander isolirt waren, und von diesen wieder zuerst die mit luftleerem Voltameter angestellten (Tab. 2—10). In den Curventafeln sind die Zeiten Abscissen, die Polarisationen Ordinaten.

Tab. 2. Luftleeres Voltameter (δ), 15^{min} lang durch 1 Daniell polarisirt. Die Beobachtungsreihe ist — wie auch im Folgenden noch öfters geschehen wird, um die Tabellen keinen zu grossen Raum einnehmen zu lassen — zusammengezogen, indem zeitlich und numerisch benachbarte Werthe zum Mittel vereinigt sind (Fig. 1):

t^{min}	0	1	4	8	12	16	20	24	28	32
H	70,4	70,0	69,3	68,6	67,7	66,8	65,7	65,0	63,8	62,2
t^{min}	36	40	44	48	52	56	60	67	71	75
H	60,6	58,5	56,8	54,9	53,3	52,1	51,0	48,9	48,0	46,7
t^{min}	79	83	87	90	92	94	96	98	100	102
H	45,1	43,2	40,8	38,3	36,6	34,2	31,8	29,3	27,2	25,1

Die Hp. nimmt vom Augenblicke der Unterbrechung an eine Zeit lang mit constanter kleiner Geschwindigkeit ab. Dann nimmt sie rascher ab, wieder langsamer, und endlich wächst die Abnahmegeschwindigkeit nochmals zu einem Maximum an, um danach wieder langsamer zu fallen. Das erste Maximum tritt bei einer Grösse der restirenden Hp. von 0,42 Daniell mit 0,6 Scalenth. pro Minute, das zweite bei 0,25 Daniell mit 1,2 Scalenth. pro Minute ein.

Tab. 3. Zwei Tage später waren beide Electroden polarisationsfrei. Es wurde jetzt dasselbe Voltameter durch 1 Daniell nur 1^{min} lang polarisirt¹⁾ (Fig. 2):

1) Der trotz der kürzeren Dauer der Polarisirung hier kleinere Werth der Hp. ist Folge geringerer Empfindlichkeit des Electrometers.

t^{\min}	0	1	4	7	11	15	19	23	27
H	63,4	61,7	60,3	59,0	58,5	57,2	54,7	52,8	50,0

t^{\min}	31	35	38	40	42	44	46	49	53
H	47,5	45,0	43,3	42,5	40,9	38,4	36,5	33,7	28,2

t^{\min}	57	61	65	69	73	77	81	85	89
H	23,6	19,8	16,8	14,5	12,9	11,1	10,0	9,1	8,2

Die Abnahmegeschwindigkeit sinkt hier zuerst bis auf einen kleinen Werth, nimmt wieder zu und bleibt einige Zeit constant (1. Maximum, Mitte desselben bei $H=0,41$ Daniell), nimmt kurze Zeit ab, steigt wieder (2. Maximum, Mitte desselben bei $H=0,25$ Daniell) und sinkt endlich bis zum völligen Verschwinden der Hp. ab. Auch jetzt ist die Höhe des ersten Maximums (0,8 Scalenth. pro Minute) geringer, als die des zweiten (1,5 Scalenth. pro Minute).

Tab. 4. Das luftleere Voltameter (*b*) wurde während 3^h durch 1 Daniell polarisirt, und dann das Verschwinden der Hp beobachtet. Ich gebe aus der Beobachtungsreihe nur einen Auszug, welcher dadurch entstand, dass die nach den Beobachtungen gezeichnete Curve in Abschnitte mit deutlich verschiedenem Gefälle eingetheilt wurde.

Minuten	Abnahme von	Abnahme pro Minute	Minuten	Abnahme von	Abnahme pro Minute
	Scalenth.	Scalenth.		Scalenth.	Scalenth.
0—5	74,4—72,6	0,36	85—144	62,0—56,2	0,10
5—15	72,6—71,7	0,09	144—226	56,2—39,4	0,20
15—45	71,7—67,0	0,16	226—238	39,4—31,7	0,64
45—85	67,0—62,0	0,12	238—270	31,7—18,8	0,40

Es treten also auch nach der langen Polarisirung durch 1 Daniell zwei Maxima der Abnahmegeschwindigkeit ein; das erste bei einer Grösse der restirenden Hp. von 0,42 Daniell, das andere bei 0,22 Daniell. Bei letzterem ist die Abnahme wieder stärker als bei ersterem.

Tab. 5. Das luftleere Voltameter (*b*) wurde 4^h lang durch 1 Daniell polarisirt, und dann das Verschwinden der Op. beobachtet. $O=72,5$, $H=70,8$ (Fig. 3):

t_{\min}	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16
0	72,5	64,6	59,0	52,1	47,0	43,3	40,3	37,8	36,1	34,2
t_{\min}	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
0	32,9	31,4	30,2	29,2	28,6	27,7	27,0	26,6	25,9	25,4
t_{\min}	40	46	52	58	64	70	76	80		
0	24,4	23,3	21,9	20,9	20,0	19,4	18,6	18,1		

Die Hp. betrug nach 82^{min} noch 66,2 Scalenth. Die Abnahme der Op. ist eine continuirlich verzögerte.

Tab. 6. Das luftleere Voltameter (b) wurde, nachdem die Wirkung früherer Polarisirungen durch 1 Daniell vollständig verschwunden waren, 40^{sec} lang durch 1 Chromsäureelement polarisirt.

Die angegebenen Werthe der Hp. sind — mit Ausnahme der drei ersten — die Mittel aus mehreren Beobachtungen, welche kurz vor und nach dem dabei bemerkten Zeitpunkt angestellt waren (Fig. 4):

t	0'	1'	3'	15'	35'	55'	75'	95'	178'	283'	410'	22 ^h 14'
H	107,8	87,5	86,5	85,9	85,5	85,1	84,7	84,3	82,5	81,1	80,2	75,0 ¹⁾
t	24 ^h 14'	25 ^h 29'	29 ^h 30'	30 ^h 11'	32 ^h 55'	46 ^h 44'	49 ^h 16'	53 ^h 21'	54 ^h 45'	56 ^h 26'	70 ^h 2'	
H	74,0	73,5	66,3	66,4	62,8	57,1	56,4	51,7	50,0	45,7	5,3	

Die Hp. nahm also in der ersten Minute um etwa ein Fünftel ihres Werthes ab und änderte sich dann während fast 3^h nur um durchschnittlich 0,02 Scalenth. pro Minute. In den folgenden 20^h war die Abnahme ebenfalls noch sehr klein, dann während einiger Stunden stärker, wieder geringer und nochmals stärker. Das nun folgende Maximum der Abnahme-geschwindigkeit fiel in die Nacht und wurde deshalb nicht beobachtet. Das erste Maximum lag bei einer Hp. = 0,49 Daniell und betrug 0,03 Scalenth. pro Minute.

Tab. 7. Das luftleere und polarisationsfreie Voltameter (b) wurde 5^{min} lang durch 1 Chromsäureelement polarisirt, und dann das Verschwinden der Op. beobachtet (Fig. 5):

1) Die Op. war vollkommen verschwunden.

A.										
t^{\min}	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17
O	128,2	103,4	100,5	98,5	96,3	93,5	90,5	88,0	85,2	82,7
t^{\min}	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
O	80,2	77,5	74,6	71,9	69,0	65,1	61,4	57,8	53,8	50,6
t^{\min}	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57
O	47,2	44,2	41,4	39,2	36,9	35,1	33,8	32,3	30,8	29,3
t^{\min}	59	61	63	65	67	69	71			
O	28,0	26,8	25,1	24,1	23,1	22,0	21,1			

Nun wurde das Voltameter sogleich von neuem durch das Chromsäureelement auf 1^{min} geschlossen, und wieder das Verschwinden der Op. untersucht. Fig. 6. In derselben ist die Abscissen (Zeiten)-Axe um 10 Scalenth. nach oben verlegt zu denken.

B.										
t^{\min}	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17
O	126,5	101,5	98,0	95,1	92,5	90,4	88,2	85,9	83,7	81,6
t^{\min}	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
O	80,0	78,1	75,5	73,0	69,2	65,8	62,1	58,0	54,3	50,7
t^{\min}	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57
O	47,3	44,2	41,7	39,3	37,2	35,7	34,0	32,5	30,8	28,9
t^{\min}	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77
O	27,1	25,4	24,0	22,7	21,5	20,3	19,6	19,1	18,4	18,1

Die Op. nimmt in den beiden Reihen im grossen und ganzen gleich schnell ab. Im einzelnen jedoch ist der Verlauf der Abnahme ein etwas verschiedener, wie bei der Betrachtung der Curven sofort auffällt: Nach der ersten Polarisirung sank die Abnahmegeschwindigkeit rasch auf ein Minimum, stieg wieder sehr schnell auf ein Maximum, nahm nochmals ab, um wieder und zwar zu einem höheren Werthe als vorhin anzusteigen. Von diesem zweiten Maximum ging sie dann continuirlich herunter, zuerst schnell, dann eine Zeit lang langsamer — geradliniges Stück der Curve —, darauf wieder rascher. Das erste Maximum tritt bei einer Grösse der restirenden Op. = 0,66 Daniell, das zweite bei

Op. = 0,4
das erste
wieder b
Bei klein
Polarisir
folgte, je
geschwin

Die
bei öfter
stanz ein
welche
Siehe sp
72 S
betrug
fernere
Stunden,
= 1000)

t^h 72

H 573

t^h 191

H 528

t^h 311

H 417

t^h 432

H 357

t^h 552 $\frac{1}{2}$

H 222

Wä

wurde

wahrt.

einen F

niger G

sache f

Werthe

nur in

schnitt

Op. = 0,42 Daniell ein. Nach der zweiten Polarisirung ist das erste Maximum nicht mehr erkennbar, das zweite liegt wieder bei $O = 0,42$ Daniell, tritt aber jetzt mehr hervor. Bei kleinen Werthen zeigt sich eben da, wo nach der ersten Polarisirung die Abnahme der Zeit etwa proportional erfolgte, jetzt nochmals ein schwaches Maximum der Abnahmegeschwindigkeit; dasselbe liegt bei $O = 0,21$ Daniell.

Die hier genauer geschilderten Erscheinungen treten bei öfterer Wiederholung mit einer bemerkenswerthen Constanz ein. Man vergleiche auch die Curven Fig. 7 und 8, welche ebenfalls das Verschwinden einer Op. darstellen. Siehe später.

72 Stunden nach Ausschaltung des Chromsäureelements betrug die Hp. noch 0,573 Daniell. Es wurde nun das fernere Verschwinden derselben gemessen. Die Zeit ist in Stunden, die Polarisation der Kathode in Daniells (1 Daniell = 1000) angegeben. Fig. 9.

		C.									
t^h	72	78	95	103	119	127	143	151	168	173	
H	573	573	567	568	561	557	548	548	535	531	
t^h	191	200	215	222	239	247	263	271	287	295	
H	528	519	506	505	492	486	470	468	446	428	
t^h	311	319½	335	345	360	368	384	393	408	419	
H	417	414	409	400	392	388	376	373	370	368	
t^h	432	441½	456	464½	481½	488½	505	513	527½	536½	
H	357	355	343	345	325	321	308	305	289	271	
t^h	552½	561½	576	584	600½	609½	624½	633			
H	222	201	178	153	151	147	120	135			

Während der ganzen Beobachtungszeit von 23 Tagen wurde das Voltameter sorgfältig vor jeder Bewegung bewahrt. Auch die Temperatur des Zimmers, welches durch einen Füllofen beständig geheizt war, wurde innerhalb weniger Grade constant gehalten. Trotzdem konnte die Ursache für die bisweilen — namentlich bei den kleinsten Werthen — unregelmässige Gruppierung der Curvenpunkte nur in Temperaturschwankungen liegen, wie der vierte Abschnitt evident zeigen wird.

Diese in wenigen Minuten durch 1 Chromsäureelement im luftleeren Voltameter erzeugte Hp. verschwindet also ganz ausserordentlich langsam. Auch dann aber treten zwei Maxima der Abnahmegeschwindigkeit auf, das eine bei $H = 0,445$ Daniell mit $0,004^{se}$ pro Min., das zweite bei $H = 0,245$ Daniell mit $0,007^{se}$ pro Min.

Alle bis dahin angeführten Beobachtungen beziehen sich auf die nämliche Evacuierung, bei welcher, wie ich nach mehreren Erscheinungen, namentlich nach der sehr langsamen Abnahme der Hp., urtheile, das Voltameter sehr gut luftfrei war. Fasse ich sämmtliche, mit dieser Evacuierung erhaltene Resultate zusammen, so ergibt sich, dass beim Verschwinden der Hp. stets zwei Maxima der Abnahmegeschwindigkeit auftreten, von denen das erste, kleinere, bei einer restirenden Hp. = durchschnittlich $0,434$ Daniell, das andere grössere bei im Mittel $0,249$ Daniell liegt. Diesen Maximis gehen zwei Minima bei im Mittel $H = 0,50$ und $H = 0,37$ Daniell vorher. Diese Werthe scheinen von der Intensität der Polarisierung, mag dieselbe durch 1 Daniell oder durch 1 Chromsäureelement während kürzerer oder längerer Zeit bewirkt sein, durchaus unabhängig. Dagegen schiebt sich mit wachsender Intensität der Polarisierung der Zeitpunkt ihres Eintritts hinaus, auch nehmen sie an Höhe ab, wie denn überhaupt die Abnahmegeschwindigkeit kleiner wird.

Die Beobachtungen über das Verschwinden der Op. weisen ein immer auftretendes Maximum der Abnahmegeschwindigkeit auf, welches bei durchschnittlich $O = 0,42$ Daniell liegt, und ein anderes bei im Mittel $O = 0,64$ Daniell, das sich nur dann zeigte, wenn seit der nächst vorhergegangenen Polarisierung eine längere Zeit verstrichen war.

Fehlt das Maximum bei $O = 0,64$ Daniell, so tritt dafür das bei $O = 0,42$ Daniell liegende mehr hervor, indem ihm dann eine Periode sehr viel kleinerer Abnahme vorhergeht, wie das namentlich aus den Curven Fig. 7 und 8 ersichtlich ist, von denen die erstere das Verschwinden der Op. im luftleeren Voltameter nach einer Polarisierung von

10^{min} D
Verschw
4^{min} D
Aus
geschwin
ein dritt
weilen r
restirend
Die
keit bei
Sie
1 Chron
Polarisi
Evacuier
jetzt an
Die
durch d
flusst zu
auf eine
Ta
polarisi
Das Fol
 t_{min} 0
H 122,
 t_{min} 80
H 78,
Ein
H = 0,5
Ta
polarisi
gestellt
 t_{min}
0
 t_{min}
H
 t_{min}
H
1) K
oben zu

10^{min} Dauer durch 1 Chromsäureelement, die andere das Verschwinden nach einer dieser unmittelbar folgenden von 4^{min} Dauer darstellt.¹⁾

Ausser den beiden genannten Maximis der Abnahmegeschwindigkeit zeigen aber fast alle Beobachtungen noch ein drittes bei $O = 0,21$ Daniell. Dieses Maximum wird bisweilen nur angedeutet durch eine bei derselben Grösse der restirenden Op. erfolgende der Zeit proportionale Abnahme.

Die Lage aller drei Maxima der Abnahmegeschwindigkeit bei der Op. war eine sehr constante.

Sie traten sämmtlich nur nach Polarisirung durch 1 Chromsäureelement, nicht aber nach selbst mehrstündiger Polarisirung durch 1 Daniell auf, wohl bemerkt bei derjenigen Evacuierung des Voltameters, auf welche allein sich alle bis jetzt angeführten Beobachtungen beziehen.

Die Maxima der Abnahmegeschwindigkeit scheinen nun durch den Grad der Luftleere des Voltameters stark beeinflusst zu werden. Die folgenden drei Tabellen beziehen sich auf eine andere Evacuierung.

Tab. 8. Durch 1 Chromsäureelement wurde 9^{min} lang polarisirt, und darauf das Verschwinden der Hp. beobachtet. Das Folgende ist ein Auszug aus der Beobachtungsreihe. Fig. 10.

t^{min}	0	1	3	5	15	26	41	55	68	74
H	122,2	96,1	94,6	94,2	92,3	90,7	88,4	85,9	82,8	80,9
t^{min}	80	86	92	98	104	110	116	Die Reihe musste hier abgebrochen werden.		
H	78,5	75,4	72,1	69,1	66,6	64,7	62,6			

Ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit liegt bei $H = 0,57$ Daniell.

Tab. 9. Durch 1 Chromsäureelement war während 3^{min} polarisirt worden. Der Verlauf der Op. ist in Fig. 17 dargestellt, der der Hp. in Fig. 11.

t^{min}	0	1	2	4	6	8	10	12	14
O	109,0	75,0	68,0	56,3	45,6	32,2	22,0	16,2	12,9
t^{min}	20	35	55	72	94	120	148	172	262
H	87,0	85,2	82,9	81,3	79,1	76,2	72,5	69,0	53,9
t^{min}	284	302	321	337	349	363	377		
H	49,2	44,9	40,1	35,5	31,8	27,5	23,8		

1) Für die Curve Fig. 8 ist die Abscissen (Zeiten)-Axe um 10^{sec} nach oben zu verlegen.

Die Op. weist ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit bei $O = 0,30$ Daniell, die Hp. ein solches bei $H = 0,24$ Daniell auf.

Tab. 10. Durch 1 Daniell wurde während 5^{min} polarisiert, dann, als noch $H > O$ war, unterbrochen, und das Verschwinden der Hp. beobachtet. Fig. 12.

t^{\min}	0	1	3	5	7	9	11	13	15
H	68,7	62,2	58,6	56,5	54,4	52,4	50,4	48,3	46,2
t^{\min}	17	19	21	23	25	27	29	31	33
H	44,2	41,9	39,4	37,2	35,0	32,8	31,1	29,7	28,1
t^{\min}	35	37	39	41	43	45	47	49	
H	26,8	25,7	24,9	23,6	22,7	21,9	21,2	20,5	

Ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit liegt bei $H = 0,36$ Daniell.

Ich unterlasse die Anführung weiterer Versuche und gebe gleich das Resultat aus allen.

Wenn die Evacuierung des Voltameters keinen sehr hohen Grad erreicht — worauf aus der rascheren Abnahme der Hp. geschlossen werden kann —, so tritt nach Polarisierung durch 1 Daniell nur ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit auf, welches durchschnittlich bei $H = 0,4$ Daniell, also dem bei vollkommenerer Evacuierung als erstes beobachteten Maximum ziemlich nahe liegt.

Nach Polarisierung durch 1 Chromsäureelement findet sich ausser dem eben genannten noch ein zweites bei $H = 0,25$ Daniell liegendes Maximum, nach öfterer Polarisierung aber beobachtet man das letztere allein, welches demnach dieselbe Lage hat, wie das bei besserer Evacuierung als zweites erhaltene.

Mehrmals wurde aber auch noch ein Maximum bei $H = 0,57$ Daniell beobachtet, jedoch niemals gleichzeitig mit dem bei $H = 0,4$ Daniell liegenden.

Bei dem Verschwinden der Op. wurde höchstens — und nur nach Polarisierung durch 1 Chromsäureelement — ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit beobachtet, dessen Lage zwischen $O = 0,3$ und $O = 0,4$ Daniell schwankte, also zwischen die in den früheren Reihen als zweites und drittes

beobachtet
mit der
weise a
gefunden

Die
gesättigt

Ta
worden.

t^{\min} 0
H 42,

Die
Nach

während

Op. beob

t^{\min} 0
0 98,

t^{\min} 19
0 68,4

t^{\min} 39
0 50,3

t^{\min} 59
0 32,3

Ein
0 = 0,3

Ta
polarisi

t^{\min} 0
0 111,

t^{\min} 17
0 57,

t^{\min} 37
0 33,

Ein
0 = 0,2

beobachteten Maxima fiel. Ein Maximum, dessen Lage etwa mit derjenigen des früheren ersten — immer nur bedingungsweise auftretenden — übereingestimmt hätte, wurde nicht gefunden.

Die folgenden Beobachtungen beziehen sich auf ein luft-gesättigtes Voltameter.

Tab. 11. Durch 1 Daniell war während 5^h polarisirt worden. Fig. 13.

t^{sec}	0	10	30	60	90	120	150	180	240	300	360
H	42,0	32,2	27,0	24,0	22,0	20,6	19,4	18,6	17,0	15,8	14,8

Die Abnahmegeschwindigkeit der Hp. sank continuirlich.

Nach dieser 6^{min} langen Unterbrechung wurde nochmals während 15^{min} polarisirt, und darauf das Verschwinden der Op. beobachtet. Fig. 14.

t^{min}	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17
O	98,4	88,9	82,7	79,5	77,0	75,4	74,0	72,7	71,2	70,0
t^{min}	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
O	68,4	66,8	65,1	63,6	62,3	60,5	58,7	57,0	54,8	52,5
t^{min}	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57
O	50,5	48,2	46,0	43,8	41,5	39,6	37,8	36,3	34,6	33,6
t^{min}	59	63	69	75	81	87	92			
O	32,3	30,6	28,8	27,4	26,0	25,1	24,0			

Ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit liegt bei $0 = 0,36$ Daniell.

Tab. 12. Ein Chromsäureelement hatte während 11^{min} polarisirt. Eig. 15.

t^{min}	0	0,3	1	3	5	7	9	11	13	15
O	111,1	84,6	79,7	74,8	71,7	68,9	66,4	63,9	61,6	59,2
t^{min}	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
O	57,4	55,7	54,1	52,4	50,7	48,2	45,4	42,5	39,2	36,2
t^{min}	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55
O	33,4	30,2	27,7	25,4	23,3	21,1	19,5	18,2	16,5	15,4

Ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit tritt bei $0 = 0,29$ Daniell auf.

Tab. 13. Durch 1 Chromsäureelement war 10^{min} lang polarisirt worden. Fig. 16.

t^{\min}	0	0,5	1	3	5	9	15	21	35
H	127,5	100,8	100,0	98,6	98,3	97,4	96,2	94,8	91,0
t^{\min}	37	39	41	43	45	47	49	51	53
H	90,1	88,7	86,9	84,3	81,3	78,8	76,7	75,1	73,5
t^{\min}	55	57	59	61	78	97	117	134	182
H	72,1	71,0	70,1	69,0	62,3	56,5	51,7	49,4	44,3

Die Reihe musste nach 182^{min} abgebrochen werden. Ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit liegt bei $H = 0,61$ Daniell.

Bei Berücksichtigung aller Beobachtungen ergibt sich folgendes Resultat:

Die Hp., welche 1 Daniell selbst nach langer Wirkungs-dauer in einem luftgesättigten Voltameter erzeugt hat, verschwindet immer mit continuirlich abnehmender Geschwindigkeit.

Bei der durch 1 Chromsäureelement erzeugten Hp. zeigt sich vielfach, nicht immer, ein stark hervortretendes Maximum, wenn die Hp. auf etwa $H = 0,6$ Daniell gesunken ist. Ferner findet sich häufig noch ein zweites aber schwaches Maximum bei $H = 0,25$ Daniell. Fehlen diese Maxima einmal, so treten statt und an der Stelle derselben längere Perioden ein, in welchen die Abnahmegeschwindigkeit constant ist.

Die Op. verschwindet im luftgesättigten Voltameter mit einem Maximum der Abnahmegeschwindigkeit, welches zwischen $O = 0,41$ Daniell und $O = 0,28$ Daniell als extremen Werthen und sowohl nach 1 Daniell, wie nach 1 Chromsäureelement auftritt — während im luftleeren Voltameter nach Polarisirung durch 1 Daniell kein Maximum beobachtet war. Die Lage dieses Maximums scheint mit der Intensität der Polarisirung zu variiren, mit deren Zunahme es nach kleineren Werthen der restirenden Op. rückt.

Sämmtliche Beobachtungen lassen mit grosser Wahrscheinlichkeit folgenden Schluss über den Einfluss zu, welchen Luftgehalt des Voltameters auf die Art des Verschwindens der Polarisationen ausübt:

H-P
Hp. von
geschwin
Luftgeha
niell dag
kleinstem
derselben
= 0,4 D
bei H =
sirung b
Fert
zeigt, fel

O-P
mum de
tritt nur
wenn di
folgte.
Daniell
grösser
das zw
Ansche
nach kl
grösser
sirung
= 0,4

M
Polaris
dass in
als die
fällt r
1 Dan
Zeit -
einer
rend
Op. v
des V

H-Polarisation. Bei einer Grösse der restirenden Hp. von etwa 0,6 Daniell tritt ein Maximum der Abnahmegeschwindigkeit nur bei Vorhandensein eines nicht zu kleinen Luftgehalts auf. Maxima bei etwa $H = 0,4$ und $0,25$ Daniell dagegen finden sich deutlich nur bei kleinem und kleinstem Luftgehalt. Beide zusammen sind häufig nicht in derselben Beobachtungsreihe vertreten, sondern das bei $H = 0,4$ Daniell liegende wird besser nach schwächerer, das bei $H = 0,25$ Daniell dagegen besser nach stärkerer Polarisierung beobachtet.

Ferner, wenn sich das Maximum bei $H = 0,4$ Daniell zeigt, fehlt das bei $H = 0,6$ Daniell liegende und umgekehrt.

O-Polarisation. Ein — wenig ausgeprägtes — Maximum der Abnahmegeschwindigkeit bei $O =$ etwa 0,6 Daniell tritt nur bei minimalem Luftgehalt ein und auch dann nur, wenn die betreffende Polarisierung nicht rasch auf eine frühere folgte. Zwei weitere Maxima bei etwa $O = 0,4$ und $O = 0,2$ Daniell finden sich bei minimalem Luftgehalt, während bei grösserem Luftgehalt statt der beiden nur eins sich zeigt, das zwischen $O = 0,4$ und $0,2$ Daniell liegt und sich allem Anschein nach mit zunehmender Intensität der Polarisierung nach kleineren Werthen der restirenden Op. verschiebt. Je grösser der Luftgehalt, eine desto weniger starke Polarisierung ist erforderlich, damit ein zwischen $O = 0,2$ und $O = 0,4$ Daniell liegendes Maximum erscheint.

Man kann noch die Frage stellen, welche von den beiden Polarisierungen rascher verschwindet? Darauf ist zu antworten, dass im luftleeren Voltameter die Hp. immer viel langsamer als die Op. abnimmt. Im lufthaltigen Voltameter dagegen fällt nach einer geringeren Intensität der Polarisierung — 1 Daniell oder auch 1 Chromsäureelement während kurzer Zeit — die Hp. etwas rascher als die Op. ab, während nach einer intensiveren Polarisierung — 1 Chromsäureelement während längerer Zeit — auch jetzt die Hp. langsamer als die Op. verschwindet. Es steht ausser Zweifel, dass Luftgehalt des Voltameters ein schnelleres Verschwinden der Hp. ver-

ursacht; ob er auf die Abnahme der Op. ebenfalls Einfluss hat, bleibt unentschieden.

3. Ueber das Verschwinden der Polarisationen bei verbundenen Electroden wurde nur ein Versuch angestellt, bei welchem das lufthaltige Voltameter durch 1 Chromsäureelement während einiger Minuten polarisirt wurde. Die Polarisationen waren $H = 97$, $O = 101$. Wurde das Element entfernt, zugleich aber die Electroden miteinander verbunden, so blieb an der Kathode eine Hp. bestehen, an der Anode aber verschwand fast augenblicklich die Op., und es entstand eine zunehmende Hp., welche derjenigen an der Kathode bald an Grösse gleich wurde. Im Folgenden ist eine normale Polarisation durch ein vorgesetztes +, eine anomale durch — bezeichnet, und die Zeit vom Moment der Ausschaltung des Elementes und der Verbindung der Electroden an gezählt.

t^{sec}	30	60	180	240
Anode	-64,0	-67,7	—	-71,0
Kathode	—	—	+70,5	—

Es änderte sich also bei der Verbindung der Electroden die Polarisation der Kathode um 27 Scalenth. die der Anode dagegen um 171 Scalenth. Wurde die Verbindung der Electroden gelöst, so nahm die Hp. der Anode zuerst langsam, dann rascher — das Maximum der Abnahmegeschwindigkeit trat bei $H = 0,34$ Daniell ein — und endlich wieder langsamer ab, war nach 110^{sec} verschwunden und ging dann in eine Op. über. Die Hp. der Kathode nahm etwas zu und betrug 3^{min} nach der Isolirung der Electroden + 78,5 Scalenth.

Der Versuch beweist, dass trotz raschen Verschwindens der Potentialdifferenz zwischen den verbundenen Electroden eine jede derselben noch eine hohe Polarisation besitzt, welche an der Kathode von normalem, an der Anode von anomalem Vorzeichen und derjenigen der Kathode an Grösse gleich ist.

4. Den Einfluss der Temperatur hatte ich bei den Untersuchungen über die Polarisation von Platin- und Goldelectroden vorläufig ausser Acht gelassen. Auch bei den Versuchen mit Palladium habe ich denselben nur in einer einzigen Richtung festgestellt, und auch da nur qualitativ.

Es l
langsam
keiten ge
ratur zu
Desl
etwaigen
Tempera
während
Die
fachster
peraturb
Bei
luftleer u
worden v
bindung
Chromsä

t^{min}
1
Voltam
3
V.
7
9
11
13
V.
18
20
V. g
23
25
27
29
V. 7 min
(-4
39
41
43
45

Es hatten sich nämlich bei der Beobachtung einer sehr langsam abnehmenden Hp. — cf. Tab. 7 C. — Unregelmässigkeiten gezeigt, welche allein auf Schwankungen der Temperatur zurückgeführt werden konnten.

Deshalb wurden einige Versuche zur Ermittlung des etwaigen Einflusses angestellt, welchen eine Aenderung der Temperatur des Voltameters auf die H- und O-Polarisation während ihres Verschwindens ausübt.

Die Erwärmung des Voltameters geschah meist in einfachster Weise über der Bunsen'schen Flamme. Eine Temperaturbestimmung wurde nicht gemacht.

Bei den folgenden Beobachtungen war das Voltameter luftleer und — nachdem es schon früher mehrfach polarisirt worden war — 5^{sec} lang mit 1 Chromsäureelement in Verbindung gewesen. Die Zeit ist von der Ausschaltung des Chromsäureelementes an gezählt.

Tabelle 14.

t_{\min}	Hp.	t_{\min}	Hp.	t_{\min}	Hp.
1	68,6	V. erwärmt		23 ^h 48 ^m	19,7
Voltam. geschüttelt		50	54,4	50	19,5
3	64,6	52	54,6	57	18,8
V. erwärmt		80	54,3	24 11	17,9
7	61,0	380	50,7	V. 10 ^m lang ins Freie	
9	60,9	V. erwärmt		(-5 ^o) gelegt	
11	60,8	385	50,4	24 ^h 25 ^m	15,0
13	60,7	387	50,4	29	14,5
V. erwärmt		23 ^h	19,4	35	14,7
18	57,4	V. erwärmt		V. erwärmt	
20	57,4	23 ^h 4 ^m	25,3	24 ^h 39 ^m	24,0
V. geschüttelt		6	26,6	41	25,2
23	55,2	8	26,7	43	25,3
25	55,9	10	26,8	47	24,9
27	56,0	12	26,4	25 0	21,4
29	55,8	14	25,9	29 0	11,9
V. 7 ^m lang ins Freie		16	25,4	46 0	7,6
(-4 ^o) gelegt		18	24,9	V. erwärmt	
39	53,9	20	24,5	46 ^h 4 ^m	12,1
41	54,5	34	21,5	6	13,1
43	55,2	36	21,0	8	13,5
45	55,2	38	20,7	10	13,7

Nach der letzten Beobachtung, welche $H = 13,7$ ergeben hatte, wurde das Voltameter geöffnet und mit Luft durchschüttelt. Dann war sogleich $H = 4,2$, stieg aber, nachdem das Voltameter während $\frac{1}{2}^h$ im Luftbade einer Temperatur von etwa 40° ausgesetzt worden war, wieder auf $H = 8,7$ und nahm mit sinkender Temperatur in 3^{min} bis auf $H = 6,6$ wieder ab.

Derartige Beobachtungen ergaben folgendes Resultat:

Schütteln des Voltameters vermindert die H_p ein wenig.¹⁾ Die Wirkung einer Temperaturerhöhung ist entgegengesetzt, je nachdem sie bei noch grossen oder bei schon kleinen Werthen der H_p erfolgt: im ersteren Falle nimmt die H_p infolge Erwärmung des Voltameters ab, im letzteren zu. Dabei tritt ein Maximum nicht sofort ein. Nach Erreichung desselben nimmt die H_p — wohl gleichzeitig mit sinkender Temperatur wieder ab. Erniedrigung der Temperatur hat eine Abnahme der H_p zur Folge.

Eine Zunahme der H_p bei Temperaturerhöhung trat jedoch nur dann ein, wenn das Voltameter luftleer oder wenigstens in diesem Zustande polarisirt worden war. Bei lufthaltigem Voltameter nahm — ausgenommen wenn die Polarisierung noch bei Luftleere erfolgt war — die H_p bei Erwärmung ab. Die O_p nahm mit zunehmender Temperatur stets ab.

5. Während bei den bisherigen Versuchen eine Electrode entweder ausschliesslich als Anode oder ausschliesslich als Kathode benutzt wurde, wechselte bei den nun zu beschreibenden die Richtung der Polarisierung.

Diese Versuche dienen zur Bestimmung des Einflusses, welchen eine H_p auf eine O_p und umgekehrt ausübt, wenn beide an derselben Electrode haften.

Sämmtliche Beobachtungen, von denen ich einige zur Erläuterung zahlenmässig anführe, sind mit lufthaltigen Voltametern angestellt.

1) Die Feststellung der Wirkung einer blossen Bewegung war zunächst nöthig, weil bei der angewendeten Methode mit einer Temperaturänderung des Voltameters eine Bewegung desselben immer verbunden war.

Die
längsten
welcher
die entgeg
nungen
normale
male (an
das Zeic
Anode E
Ist
— womi
in der
Kathode
eine geg
grössere
sammtpo
Win
male (O
(also ebe
Bei
näher
Richtung
Tab
den:
Rich
Nach 50
Unterbr
In
Nach 10
Pola
Minuten
Kathode
der An
bei norm
tritt ab
auf, wäl

Diejenige Richtung, in welcher am häufigsten und am längsten polarisirt ist, werde als die normale, die andere, in welcher immer nur auf kürzere Zeit polarisirt wurde, als die entgegengesetzte oder anomale bezeichnet. Die Benennungen Anode und Kathode beziehen sich immer auf die normale Richtung. Das Vorzeichen + bedeutet eine normale (an der Kathode H-, an der Anode O-) Polarisation, das Zeichen - eine anomale (an der Kathode O-, an der Anode H-) Polarisation.

Ist kürzere oder längere Zeit durch 1 Daniell polarisirt - womit $H < O$ geworden ist -, und polarisirt man darauf in der entgegengesetzten Richtung, sodass die Anode zur Kathode und umgekehrt wird, so erscheint (an der Anode) eine gegen früher kleinere Hp. und (an der Kathode) eine grössere Op. Diese nimmt langsam ab, jene zu. Die Gesamtpolarisation hat etwa die gleiche Höhe wie vorher.

Wird unterbrochen, so zeigt die Anode wieder eine normale (O-) Polarisation, die Kathode dagegen eine anomale (also ebenfalls O-) Polarisation.

Bei Rückkehr zur normalen Richtung der Polarisation nähern sich die Polarisationswerthe den bei der gleichen Richtung vorher erhaltenen wieder an.

Tab. 15. Durch 1 Daniell war 6^h lang polarisirt worden:

$$H = 33,9, \quad O = 73,4.$$

Richtung der Polarisation gewechselt:

$$\text{Kath.} - 93,8, \quad \text{An.} - 13,4.$$

$$\text{Nach } 50 \text{ min:} \quad \text{„} - 90,4, \quad \text{„} - 16,7.$$

$$\text{Unterbrochen:} \quad \text{„} - 62, \quad \text{„} + 5,6.$$

In normaler Richtung polarisirt:

$$\text{Kath.} + 24,2, \quad \text{An.} + 82,2.$$

$$\text{Nach } 10 \text{ min:} \quad \text{„} + 27,6, \quad \text{„} + 79,2.$$

Polarisirt man durch 1 Chromsäureelement nur wenige Minuten, so erscheint beim Wechseln der Richtung an der Kathode eine zunehmende Op., welche bald grösser, und an der Anode eine abnehmende Hp., welche sofort kleiner, als bei normaler Richtung ist. Nach Unterbrechung des Kreises tritt aber an der Kathode sofort wieder eine wachsende Hp. auf, während an der Anode eine hohe Hp. bestehen bleibt,

welche zwar etwas abnimmt, aber die der Kathode auch nach langer Zeit noch übertrifft. Wird die normale Richtung hergestellt, so zeigt die Kathode eine grössere, aber sofort abnehmende Hp., die Anode eine kleinere zunehmende Op. Aber selbst nach einer normalen Polarisirung, welche die entgegengesetzte an Dauer mehrfach übertrifft, macht die letztere ihren Einfluss noch geltend, indem bei Unterbrechung des Kreises an der Anode eine kleine Hp. auftritt.

Tab. 16. Als durch 1 Chromsäureelement 3^{min} lang polarisirt war, ergab sich:

$$H = 99,6, \quad O = 92,2.$$

Richtung der Polarisirung gewechselt:

Kathode:	40 ^{sec}	— 88,6	Anode:	120 ^{sec}	— 81,3
	70	— 98,8		290	— 79,2
	210	— 107,0			

Unterbrochen: Kath. +69,1, An. — 76,6.

Nach 15^{min}: Kath. +71,5, An. — 74,5.

In normaler Richtung polarisirt:

Kathode:	1 ^{min}	+ 103,3	Anode:	2 ^{min}	+ 88,7
	3	+ 97,4			

Nach 25^{min}: Kath. +92,5, An. +97,5.

Unterbrochen: Kath. +75,3, An. — 6,0.

Polarisirt man aber durch 1 Chromsäureelement mehrere Stunden lang, so erscheint beim Wechseln der Richtung an der Kathode eine Op., welche sehr viel kleiner, und an der Anode eine Hp., welche etwas grösser als vorher ist. Erstere nimmt zu, letztere ab. Nach Unterbrechung herrscht an beiden Electroden hohe Hp. Die an der Kathode ist grösser, als bei Unterbrechung nach normaler Polarisirung, wird aber durch die Hp. an der Anode noch übertroffen.

Wird die normale Richtung der Polarisirung hergestellt, so zeigen zunächst beide Electroden Hp.; die sehr grosse der Kathode nimmt ab, ebenso die kleinere der Anode, welche letztere endlich in eine Op. übergeht.

Bei baldiger Unterbrechung tritt nochmals an der Anode eine Hp. auf, die aber nun derjenigen der Kathode an Grösse nachsteht, zuerst zu- und dann wieder abnimmt, während die

Hp. an der Kathode während langer Zeit vollkommen constant ist.

Tab. 17. Durch 1 Chromsäureelement wurde 15^h lang polarisirt: H = 95,3, O = 97,2.

Bei Unterbrechung des Kreises war:

H = 70,4, O = 69,5,

beide merklich constant.

Sofort wurde das Voltameter wieder durch das Chromsäureelement geschlossen:

H = 99,2, O = 92,9.¹⁾

Richtung der Polarisirung gewechselt:

Kathode:	2 ^{min}	-56,4		Anode:	1 ^{min}	-108,3
	2,5	-58,4				

Element ausgeschaltet:

Kath. +74,6, An. -78,9.

In normaler Richtung polarisirt:

Kathode:	60 ^{sec}	+189,7		Anode:	110 ^{sec}	-21,9
	200	+111,8			130	+29,1
					150	+51,6
					290	+82,6

Element ausgeschaltet:

Kathode:	1 ^{min}	+76,7		Anode:	2 ^{min}	-69,4
	15	+76,4 ²⁾			16	-71,3
	45	+76,5			46	-63,5

Obwohl also einer 15^h langen Polarisirung in normaler Richtung eine entgegengesetzt gerichtete von nur 3^{min}, dieser aber wieder eine normale von 6^{min} Dauer gefolgt war, so machte sich die entgegengesetzte doch nach $\frac{3}{4}$ ^h und länger noch durch die Existenz einer Hp. an der Anode bemerkbar.

6. Die Abhängigkeit, in welcher die Polarisirung einer Electrode von der Grösse der polarisirenden Kraft steht, wurde in der in der ersten Abhandlung beschriebenen Weise untersucht. Im Folgenden sind nur die nach langer Dauer der Polarisirung beobachteten Werthe der Polarisirungen angegeben. Die Beobachtungen sind nach der Reihenfolge

1) Man bemerke, dass trotz nur 2^{min} langer Unterbrechung die Hp. m- und die Op. abgenommen hat. Cf. den 1. Abschn.

2) 76,5 Scalenth. entsprechen 0,71 (Troeken-) Daniell, 70,4 Scalenth. dagegen 0,66 (Troeken-) Daniell.

ihrer Anstellung geordnet. Alle Zahlen beziehen sich auf die Einheit: 1 Trocken-Daniell = 100.

Tab. 18. Fig. 18 u. 20. Luftleeres Voltameter.

Polaris. Kraft	Hp.	Op.	Hp. + Op.	Pol. Kraft — (Hp. + Op.)	H/O
24,3	16,1	8,1	24,2	+0,1	1,99
48,0	24,3	23,2	47,5	+0,5	1,05
71,3	31,4	39,5	70,9	+0,4	0,79
94,6	39,1	54,7	93,8	+0,8	0,71
118,4	50,0	67,0	117,0	+1,4	0,75
141,6 ¹⁾	64,1	75,6	139,7	+1,9	0,85
153,4	70,3	81,8	152,1	+1,3	0,86
157,5	75,7	82,7	158,4	—0,9	0,92
172,6	85,7	87,4	173,1	—0,5	0,98
182,7	93,7	90,8	184,5	—1,8	1,03
197,6	100,4	97,3	197,7	—0,1	1,03
212,0	105,9	104,3	209,9	+2,1	1,02

Während der Wirkung einer Kraft blieben die Polarisationen annähernd constant bei der kleinsten von 0,243 Daniell und bei den grösseren Kräften. Dagegen nahm die Hp. ab und die Op. zu bei den Kräften, deren Grösse zwischen 0,4 und 1,4 Daniell lag.²⁾

Nun wachsen die nach langer Polarisirung erreichten Endwerthe der Hp. zuerst langsamer, dann rascher und endlich wieder langsamer als die polarisirenden Kräfte an, während die Op. sich gerade umgekehrt verhält. Vergleicht man dieses Anwachsen der Endwerthe mit der beobachteten Abnahme der Hp. und Zunahme der Op., so zeigt die graphische Darstellung sofort, dass die bei mittleren Kräften stattfindende Senkung der H-Curve und die Erhebung der O-Curve Folgen dieser Ab- und Zunahme der Hp. und Op. während einer Polarisirung sind, mit anderen Worten, dass die Senkungen der H-Curve und die gleichzeitigen Hebungen

1) An der Anode Gas.

2) Dass auch noch bei anderen Kräften eine gewisse kleine Veränderlichkeit der Einzelpolarisationen stattfindet, ist nicht ausgeschlossen. Verschwindend ist dieselbe aber bei dem hier eingeschlagenen Verfahren, bei welchem die grössere Kraft der kleineren unmittelbar folgte. Auch ist ja eine kleine Veränderlichkeit bei 1 Chromsäureelement = ca. 1,6 Daniell schon früher beobachtet. Cf. Tab. 17. Anm.

der O-
stellten
nur sel
troden
So
sation
Kraft i
einfach
lichkeit
einer d
fremder
Bi
ist H >
1,8 Dan
als O.
Di
bis 2,1
treten
währen
scheine
Einfluss
H/
Minimu
T a
Polaris.
Kraft
16,2
27,0
39,4
54,4
81,5
108,5
135,0
157,9
184,4
172,3
191,9
204,9
1) A
2) A
deckt.

der O-Curve wahrscheinlich nicht oder nicht in der dargestellten Grösse eintreten würden, wenn man eine jede Kraft nur sehr kurze Zeit, und zwar auf polarisationsfreie Electroden wirken liesse.

Somit würde das Gesetz, nach welchem sich die Polarisation einer Electrode mit der Grösse der polarisirenden Kraft ändert, bei Polarisirungen von sehr kurzer Dauer sich einfacher gestalten, woraus weiter folgt, dass die Veränderlichkeit der Einzelpolarisationen bei gewissen Kräften auf einer dem Wesen der galvanischen Polarisation ursprünglich fremden Ursache beruht.

Bis zu einer polarisirenden Kraft von etwa 0,5 Daniell ist $H > O$, dann wird $H < O$ bis zu einer Kraft von etwa 1,8 Daniell, und danach wird wieder H unbedeutend grösser als O .

Die Gesamtpolarisation ist der polarisirenden Kraft bis 2,12 Daniell immer sehr nahe gleich. An der Anode treten die ersten Gasbläschen schon bei 1,4 Daniell auf, während die Kathode immer frei von Gas blieb. Das Erscheinen von Gas an der Anode äussert übrigens keinen Einfluss auf den Verlauf der Polarisationen.

H/O nimmt mit wachsender Kraft ab, erreicht ein Minimum bei 1 Dan. und wächst darauf bis zu einem Maximum.

Tab. 19. Luftgesättigtes Voltameter Fig. 19 und 20.

Polaris. Kraft	Hp.	Op.	Hp + Op.	Pol. Kraft — (Hp. + Op.)	H/O
16,2	11,5	4,6	16,1	+0,1	2,50
27,0	16,8	10,2	27,0	0	1,65
39,4	18,7	21,1	39,8	—0,4	0,89
54,4	23,3	31,2	54,5	—0,1	0,75
81,5	31,5	50,1	81,6	—0,1	0,63
108,5	40,4	67,7	108,1	—0,1	0,60
135,0	55,6	79,3	134,9	+0,1	0,70
157,9 ¹⁾	71,5	85,5	157,0	+0,9	0,84
184,4	85,0	97,0	182,0	+2,4	0,88
172,3	78,4	93,1	171,5	+0,8	0,84
191,9	88,5	100,5	189,0	+2,9	0,88
204,9 ²⁾	95,1	104,9	200,0	+4,9	0,91

1) An der Anode einige Gasbläschen.

2) An der Kathode vereinzelte Bläschen. Die Anode ist mit Gas bedeckt.

Im lufthaltigen Voltameter erstreckte sich das Gebiet der Kräfte, unter deren Wirkung eine bemerkenswerthe Abnahme der Hp. und Zunahme der Op. erfolgte, von 0,4 Daniell bis 1,1 Daniell. Bei den übrigen Kräften waren die Polarisationen sogleich merklich constant. Auch jetzt fällt die grösste Veränderlichkeit der Einzelpolarisationen auf solche Kräfte, bei denen die Endwerthe der Hp. am meisten zurückgeblieben und diejenigen der Op. am meisten vorgeeilt sind. Es gelten für das lufthaltige Voltameter die gleichen Bemerkungen wie für das luftleere.

Das Gesetz, nach welchem die Endwerthe der Hp. und der Op. mit wachsender polarisirender Kraft zunehmen, wird durch die Luftaufnahme des Voltameters nicht geändert. H/O erreicht seinen kleinsten Werth jetzt ebenfalls bei 1 Daniell. Dagegen sind die Werthe von H/O jetzt durchweg kleiner ausgefallen, indem infolge der Luftaufnahme bei allen Kräften die Hp. ab- und die Op. zugenommen hat. Bei Kräften kleiner als 0,35 Daniell ist $H > O$, von da an bleibt $H < O$ bis zu den grössten angewandten Kräften. Zwischen dem Auftreten von Gas an den Electroden und dem Anwachsen der Einzelpolarisationen mit wachsender Kraft besteht kein deutlicher Zusammenhang. Dagegen bleibt mit dem Erscheinen von Gas an der Anode und weiterhin zugleich mit dem ersten Auftreten von Gas an der Kathode die Gesamtpolarisation, welche bis dahin der polarisirenden Kraft vollkommen gleich gewesen war, hinter derselben in entschiedener Weise zurück.

Eine folgende Mittheilung wird den Versuch zu einer zusammenfassenden Erklärung der in den drei Abhandlungen niedergelegten Beobachtungsergebnisse enthalten.

Math.-phys. Inst. der Univ. Giessen, Anf. Nov. 1886.

IX.

I
wurde
Wert
Oeffn
nehm
Hülfe
geführ
Uhrwe
Unter
fessor
nutzt,
Dieser
Vorrat
delnde
Fallha
wirkt,
den E
dessel
Auffa
werde
dicken
solche
so zus
tical
sind s
beweg
förmig
befest
Rücks
ren h
D
cylind
messer

IX. Ueber die Leuchtdauer des Oeffnungsfunkens des Inductoriums; von Carl Hünlich.

(Hierzu Taf. IV Fig. 21.)

Durch widersprechende Resultate bei Fallversuchen wurde ich veranlasst, der Frage näher zu treten, welche Werthe unter gegebenen Umständen die Funkendauer beim Oeffnen des primären Stromes eines Inductionsapparates annehmen könne. Die dazu angestellten Versuche wurden mit Hülfe eines um eine verticale Axe rotirenden Spiegels ausgeführt, welcher, auf einem Schnurconus befestigt, durch ein Uhrwerk in Bewegung gesetzt wurde. Zur Erzeugung der Unterbrechungsfunken wurde ein besonderer, von Hrn. Professor Dr. Weinhold in Chemnitz construirter Apparat benutzt, den Tafel I in axonometrischer Projection darstellt. Dieser Funkenapparat besteht aus vier Theilen: 1) aus einer Vorrichtung zur Stromunterbrechung (*A*), 2) aus einem pendelnden Hammer (*B*), welcher die Stromöffnung, je nach der Fallhöhe, mit grösserer oder kleinerer Geschwindigkeit bewirkt, 3) aus einem Electromagnet mit Anker (*C*), welcher den Hammer vor der Stromöffnung hält und das Loslassen desselben im geeigneten Momente vermittelt, und 4) aus einer Auffangevorrichtung (*D*) für den Hammer. Alle diese Theile werden von einer 40 cm hohen, 44,5 cm breiten und 3 cm dicken Holzplatte getragen, die ihrerseits mit einer eben solchen, aber nur 20 cm breiten Platte unter rechtem Winkel so zusammengefügt ist, dass der ganze Funkenapparat vertical stehen kann. Abgesehen vom Träger des Hammers sind alle Theilapparate in Schlitten auf der grossen Tafel beweglich, und zwar die Theile *D* und *C* in kreisbogenförmigen Schlitten, *A* in einem horizontalen Ausschnitte; befestigen lassen sich alle durch Stahlschrauben von der Rückseite des Gestelles aus, da sie sämmtlich auf besonderen hölzernen Unterlagen ruhen.

Die Unterbrechungsfunken werden durch Trennung zweier cylindrischer Stahlstäbchen *A* und *A'*, von etwa 2 mm Durchmesser, erzeugt, von denen *A'* fest, *A* aber in genau passenden

Öffnungen zweier rechtwinklig gebogener Messingträger D_2 beweglich ist. Als fester Stift fungirt das halbkugelförmig abgerundete Ende einer Stellschraube, welche nebst Gegenmutter von einem rechtwinkligen Messingstück F getragen wird. Letzteres ist, nebst einer zur Aufnahme des Leitungsdrahtes bestimmten Klemmschraube S , auf einer besonderen, auch im horizontalen Schlitze beweglichen Holzunterlage befestigt. Der bewegliche Stift, etwa 12,5 cm lang, hat 10 cm von der Contactstelle einen conischen Ansatz, der wulstartig den Stab umschliesst, und an welchen der fallende Hammer schlägt, wenn er die Stromöffnung vollzieht. Dabei gleitet die Wulst über eine nach oben drückende U-förmig umgebogene Stahlfeder B , die nach geschehener Unterbrechung das bewegliche Stäbchen hindern soll, in seine Anfangslage zurückzukehren. Dazu würde es sonst durch die Spiralfeder B' veranlasst werden, deren Zweck es ist, einmal den beweglichen Stift beim Contact fest gegen den anderen zu drücken, und dann, zu verhindern, dass der Hammer den Stift zu weit zurückschlage. Das eine Ende dieser Feder ist mit dem Stäbchen A in fester Verbindung, das andere ist auf den oberen Theil des Messingträgers C_2 geschraubt, auf welchem sich noch eine Klemmschraube zur Befestigung des Leitungsdrahtes befindet. So dient schliesslich diese Feder noch zur Ueberführung des Stromes zum Stäbchen A . Um die Spannung der Spiralfeder nach Bedürfniss abändern zu können, ist das Messingstück C_2 in einem ausgekehlten Einschnitte WW der hölzernen Unterlage verschiebbar, so aber, dass es an jeder Stelle durch die Schraube festgezogen werden kann. Aehnliches gilt vom Träger C_1 der Druckfeder B .

Ueber dem eben beschriebenen Theilapparate A hängt an einem gusseisernen Gestelle G , welches normal gegen die Hauptplatte des Funkenapparates festgeschraubt ist, der Unterbrechungshammer von Stahl. Er besteht zunächst aus einem unteren doppelt conischen Theile H , dem eigentlichen Hammer, der in der Mitte und nach den beiden Endflächen zu die ringförmigen Ansätze W_1 , W_2 und W_3 hat. Diese laufen auch conisch zu, und zwar W_1 und W_3 so, dass man durch übergreifende Haken oder Nasen den Hammer aufhängen

kann, mit ihm am Stäbchen müssen einander stifte verbinden. Axe der platte halben seiner kann, eine H von de an den ert na nur fü kann. durch,

In Hamm stell C nets, z TT ge Stab A Spulen ist der Einsch förmig Wulst noch rückzi rahen. wird d der W N rotiren bindu

kann, während die mittlere Wulst so gestaltet ist, dass sie mit ihrer ebenen Fläche an die entsprechende des Ansatzes am Stifte A anschlagen kann. In der Ruhelage des Hammers müssen die beiden ebenen Flächen, wie die Figur es zeigt, einander berühren, vorausgesetzt, dass die beiden Contactstifte aneinanderstossen. — Eine cylindrische Pendelstange verbindet den Hammer H mit dem Quercylinder J , um dessen Axe der Hammer seine Schwingungen, parallel zur Hauptplatte des Funkenapparates ausführt. Damit er nach einer halben Schwingung nicht wieder zurückkehren und vermöge seiner Schwere durch Anschlagen Beschädigungen anrichten kann, wird er durch die Vorrichtung D aufgehalten. Auf eine Holzunterlage sind zwei Federn F_1 und F_2 geschraubt, von denen die erste den Hammer bei grösseren Schwingungen an der Pendelstange auffängt, während die zweite, natürlich erst nach einer Drehung der Auffangvorrichtung um 180° , nur für sehr kleine Schwingungen in Anwendung kommen kann. Dann fängt und hält die Feder F_2 den Hammer dadurch, dass sie mit der Nase N über die Wulst W_1 greift.

Im Schlitz S_2 ist die Vorrichtung zum Loslassen des Hammers verschiebbar. Ein rechtwinklig umgebogenes Gestell OO trägt die beiden Rollen EE eines Electromagnets, zu denen der Strom durch die beiden Klemmschrauben TT geführt wird. Als Anker dient ein eiserner vierkantiger Stab P , welcher in passenden Einschnitten der über die Spulen hinaus verlängerten Eisenkerne liegt. Im Einschnitt Q ist der Anker um eine feste Axe drehbar, und über dem Einschnitte des unteren Eisenkernes trägt er einen nasenförmigen Ansatz M , an welchen man den Hammer mit der Wulst W_3 hängen kann. Dabei darf natürlich der Anker noch nicht angezogen sein, sondern muss, der ihn leicht zurückziehenden Spiralfeder K folgend, auf dem Messingstifte L ruhen. Sobald der Strom durch den Electromagnet geht, wird der Anker bei M angezogen, die Nase M gleitet unter der Wulst des Hammers vor, und dieser fällt herab.

Nun handelt es sich noch um eine Vorrichtung, die den rotirenden Spiegel und Electromagnet solchergestalt in Verbindung setzt, dass innerhalb der Fallzeit des Hammers,

vom Loslassen bis zur Unterbrechung des Contactes, der Spiegel genau die Stellung erreicht, von welcher aus er das Funkenbild gerade ins Beobachtungsfernrohr wirft. Zu diesem Zwecke verbindet man den Electromagnet und den Rotationsapparat durch einen besonderen electricischen Strom und lässt das Schliessen desselben, d. h. das Loslassen des Hammers, durch den Rotationsapparat selbst besorgen.

Dazu ist an der unteren Fläche des Schnurconus eine bewegliche Vorrichtung angebracht, die man für jede Umdrehungsgeschwindigkeit und jede Hammerhöhe so stellen kann, dass sie den Strom in dem Augenblicke schliesst, von welchem aus bis zur richtigen Spiegelstellung genau soviel Zeit verstreicht, wie der Hammer braucht, um seinen Bogen vom Electromagnet bis zur Unterbrechungsstelle zu beschreiben.

Die Anordnung und Zusammenwirkung der Apparate bei den Versuchen war folgende: Der Strom der Hauptbatterie, je nach der Art des Versuches von 1—6 Bunsen'schen Zink-Kohle-Elementen erzeugt, wurde einerseits direct zum Inductionsapparate und von hier zum Stäbchen *A*₁ des Funkenapparates geführt; andererseits nahm er seinen Weg zur Tangentenbussole, ging zu einem Doppeltaster, von da zum Inductor und schliesslich zum Stäbchen *A* des Funkenapparates. Dieser letztere ist also gewissermassen an Stelle des Quecksilberunterbrechers beim Inductor eingeschaltet. — Eine zweite Batterie, die für alle Versuche aus vier halbgefüllten Bunsenelementen bestand, schickte ihren Strom zum Schnurconus des Spiegelapparates, zum Electromagnet und schliesslich auch zum Doppeltaster. Durch diese letztgenannte Vorrichtung konnten gleichzeitig die Ströme beider Batterien, natürlich aber jeder für sich, geschlossen, resp. geöffnet werden.

Die durch den Spiegel reflectirten Funkenbilder wurden mittelst eines (astronomischen) Fernrohres beobachtet, in welches ausserdem noch das Bild einer Scala durch ein Prisma so geworfen wurde, dass der Beobachter den Eindruck gewann, als fiele das Funkenbild direct auf jene Scala. Diese war abwechselnd in weisse und schwarze Streifen von

1 cm
man
meter

1
eine
r die
n die
trägt
1 mm

und
1041

bilde

Spieg
blick
auf d
dann
drati

zu b
vom
hem
schw
des
Grös
weise

die I
wie
wend
vork

1 cm Breite getheilt, mit Hülfe einiger Uebung aber konnte man die Funkenlängen mit leidlicher Sicherheit auf Millimeter schätzen.

Bezeichnet L die durchschnittliche Funkenlänge für eine aus 15—20 Einzelversuchen bestehende Versuchsreihe, r die Entfernung der Unterbrechungsstelle vom Spiegel, und n die Anzahl der Spiegelumdrehungen in der Minute, so beträgt die Zeit τ , welche zur scheinbaren Funkenlänge von 1 mm gehört:

$$\tau = \frac{60}{n} \cdot \frac{1}{4r\pi} \text{ Sekunden,}$$

und da für die folgenden Versuche r einmal den Werth 1041 mm, das andere mal 1050 mm hatte (vgl. p. 354), ist:

$$\tau_1 = 0,004587 : n \text{ Sec.} \quad \tau_2 = 0,004547 : n \text{ Sec.}$$

Aus dem Werthe τ ergibt sich die zu jedem Funkenbilde von der Länge L zugehörige Leuchtdauer:

$$t = L\tau.$$

Dabei ist für die folgenden Beobachtungen diejenige Spiegelumdrehung gewählt worden (Rechtsdrehung bei Anblick der Spiegelfläche), bei welcher das directe Funkenbild auf die der Leuchtdauer allein entsprechende Lichtlinie fällt; denn im anderen Falle wäre die Zeit erst aus einer quadratischen Gleichung von der Form:

$$L = -\frac{p}{2}t^2 + t\left(c + \frac{1}{\tau}\right)$$

zu berechnen, wobei p die Verzögerung bedeutet, welche das vom Hammer zurückgeschlagene Stahlstäbchen durch die hemmende Kraft der Federn erleidet, und c die Anfangsgeschwindigkeit der Unterbrechung, d. h. die Geschwindigkeit des Hammers beim Passiren der Gleichgewichtslage. Beide Grössen lassen sich ohne grosse Schwierigkeit näherungsweise bestimmen.

Die vorliegende Arbeit verfolgt vornehmlich den Zweck, die Dauer des Oeffnungsfunkens für solche Fälle festzustellen, wie sie bei praktisch-physikalischen Arbeiten oder bei Anwendung gewisser Instrumente (Registrirapparate u. dergl.) vorkommen können. Dazu ist es aber ausreichend, wenn

zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen Funkendauer und Stromstärke die letztere einfach so in Betracht gezogen wird, wie sie sich durch den Ausschlag der Tangentenbussole für die einzelnen Beobachtungsreihen ergibt. Streng genommen müsste freilich zur Ermittlung der Abhängigkeit der Funkendauer von der Stromstärke auch die Intensität des Oeffnungs-Extrastromes gemäss der Formel:

$$O = \frac{PE}{W^2} \left(1 - e^{-\frac{w}{P}t} \right)^1$$

für die Gesamtstromstärke berücksichtigt werden; aber dazu wäre für jede Versuchsreihe eine umständliche Bestimmung der Widerstände und electromotorischen Kräfte erforderlich gewesen.

Die folgenden Versuche sind mit einiger Ausführlichkeit nur für Stahlcontact ausgeführt worden. Bei anderen Metallcontacten (Silber, Aluminium, Zink, Kupfer, Platin und Quecksilber) sind weniger Versuchsreihen angestellt, beziehentlich nur zwei verschiedene Unterbrechungsgeschwindigkeiten in Frage gezogen worden.

Als Inductionsapparat diente der Hauptsache nach ein gewöhnlicher Stöhrer'scher Funkeninductor (für 6 cm lange Secundärfunken). Ausserdem wurden Versuche mit einem sehr grossen, von Hrn. Prof. Weinhold in Chemnitz construirten Inductionsapparate ausgeführt. Die verschiedenen Metallcontacte wurden dadurch hergestellt, dass kleine Stiftchen von etwa 2 mm Länge und 1 mm Dicke an die zur Stromöffnung bestimmten Stahlstäbchen A und A_1 angeschraubt wurden. Um die Stromöffnung bei Quecksilber herzustellen, wurden über die Enden der genannten Stäbchen A und A_1 kleine, gut passende Glasröhrchen von etwa 6 mm Länge aufgesteckt und mit Wachskitt befestigt. An den zusammenstossenden Enden waren sie gut abgeschliffen, und da ihr innerer Durchmesser sehr klein war, konnten sie durch eine seitlich gebogene Pipette so mit Quecksilber gefüllt werden, dass dasselbe beim Zusammenstossen der Glas-

1) Vgl. G. Wiedemann, Galvanismus. 2. II. p. 91.

röhrch
natürl
diese
D
gewes
Z
der p
wurde
einanc
ferner
hängt
E
aus d
a
aus v
s
L
t
n
J
die E
brech
gröss

Am
Ele

röhrchen den Stromkreis schloss. Die Füllung musste natürlich nach jedem Einzelversuch erneuert werden, was diese Versuche besonders mühsam und zeitraubend machte.

Die Anwendung des grossen Inductors ist eine vierfache gewesen.

Zuerst nämlich wurde der Apparat so benutzt, dass bei der primären Spule die Drähte hintereinander geschaltet wurden, und zweitens in der Weise, dass sie parallel nebeneinander verbunden wurden. In jedem dieser Fälle wurden ferner Beobachtungen angestellt sowohl mit als ohne angehängten Condensator.

Bei der nun folgenden Zusammenstellung der Resultate aus den Versuchsreihen mögen bezeichnen:

α = Stromstärke in Graden der Tangentenbussole. (Mittel aus vier Ablesungen.)

s = Stromstärke in Ampères.

L = mittlere Funkenlänge für eine Versuchsreihe.

t = durchschnittliche Funkendauer in Secunden.

n = Anzahl der Spiegelumdrehungen in der Minute.

Bei der kleinsten Unterbrechungsgeschwindigkeit betrug die Entfernung des untersten Hammerrandes von der Unterbrechungsstelle 19 mm, bei der mittleren 64 und bei der grössten 238 mm.

A. Gewöhnlicher (Stöhrer'scher) Inductor.

1. Stahlcontact.

α . Kleinste Unterbrechungsgeschwindigkeit.

Anzahl d. Elemente	α	s	n	L	$10^3 t$
4	54,3	6,73	22,67	28,5	575
3	48,4	5,45	"	21,8	440
2	41,6	4,296	"	17,0	343
1	25,8	2,339	"	5,1	103
3	48,1	5,39	23	21,2	423
1	24,3	2,185	"	5,1	102
2	30,1	2,805	"	9,8	195
3	40,8	4,177	"	18,8	375
4	44,8	4,806	"	20,2	403
3	36,8	3,620	"	14,2	283

β . Mittlere Unterbrechungsgeschwindigkeit.

Anzahl d. Elemente	α	s	n	L	$10^5 t$
4	56,75	7,38	22,67	22,2	448
3	51,0	5,97	"	15,4	311
2	38,0	3,781	"	6,6	133
1	16,0	1,387	"	1,1	22
2	38,5	3,850	"	10,1	204
3	49,9	5,75	"	15,5	313
4	54,9	6,89	"	19,6	396
3	42,5	4,434	"	10,6	214
3	38,3	3,822	"	9,2	186
2	33,5	2,850	"	6,9	139
1	24,3	2,185	"	2,7	54
4	51,8	6,15	"	19,5	394
3	46,9	5,17	"	15,8	319
2	40,6	4,148	"	9,3	188

 γ . Grösste Unterbrechungsgeschwindigkeit.

4	55,8	7,12	22,33	15,5	318
3	51,3	6,04	"	12,2	250
2	42,1	4,373	"	7,7	158
1	28,8	2,66	"	0,7	14
4	44,4	4,739	22,67	9,7	196
3	36,9	3,638	"	5,2	105
2	42,3	4,403	"	7,2	145
1	27,8	2,552	"	0,8	16
3	33,0	3,143	"	3,8	77
2	41,6	4,296	22,33	7,2	148

 γ_1 . (Frühere Versuche.)

4	35,3	3,296	23	4,5	89
3	30,8	2,774	22,67	2,7	54
2	23,5	2,027	22,5	0,6	12
5	55,0	6,658	22	13,1	271
4	48,3	5,225	"	10,2	210
3	42,0	4,199	"	6,8	141
4	35,0	3,265	23	4,3	85

Versuch mit einem kleinen Inductor.

4	39,0	1,25	23	3,776	25
---	------	------	----	-------	----

II. Aluminiumcontact.

Anzahl d. Elemente	α	s	n	L	$10^5 t$	Unterbrechungsgeschw.
4	46,0	4,829	23	20,2	400	Kleinste
3	42,8	4,311	"	16,2	320	
2	35,5	3,326	"	10,1	200	
1	23,5	2,027	"	2,5	49	
4	43,5	4,425	"	18,5	366	
4	42,3	4,236	23	9,1	180	Grösste
3	34,5	3,204	"	5,2	103	
2	24,5	2,125	"	2,3	46	
1	10	0,822	"	0	—	

III. Zinkecontact.

Anzahl der Elemente	α	s	n	L	$10^6 t$	Unterbrechungsgeschw.
4	42,0	4,199	23	21,6	427	Kleinste
3	34,0	3,145	"	15,8	312	
2	25,5	2,224	"	9,6	190	
1	16,0	1,337	"	1,0	20	
4	38,5	3,709	"	18,1	357	
4	39,3	3,810	23	7,3	144	Grösste
3	32,8	3,00	"	5,0	99	
2	25,0	2,174	"	2,6	51	
1	23,0	1,979	"	2,1	42	
1	16,0	1,337	"	0,0	0	

IV. Silbercontact.

4	50,8	5,707	23	21,2	419	Kleinste
3	43,3	4,386	"	9,7	198	
2	34,5	3,204	"	2,6	51	
1	22,5	1,931	"	0	0	
1	22,0	1,883	"	0	0	
2	33,5	3,085	"	3,1	61	
3	40,0	3,912	"	9,8	194	
4	44,5	4,582	"	16,3	323	Grösste
4	47,0	5,00	23	7,5	149	
3	41,5	4,125	"	5,4	107	
2	33,3	3,057	"	2,8	56	
1	22,0	1,883	"	1,0	20	

V. Kupfercontact.

4	43,3	4,387	23	19,5	386	Kleinste
3	37,5	3,578	"	15,2	300	
2	30,5	2,746	"	9,6	191	
1	20,5	1,743	"	2,2	43	
4	45,5	4,745	22,67	21,0	421	
4	36,3	3,420	22,5	13,6	275	
3	24,0	2,075	22	3,6	74	
4	43,0	4,349	22,5	7,9	159	Grösste
3	40,0	3,912	"	6,4	129	
2	31,8	2,885	"	3,3	66	
4	36,0	3,388	22,25	5,1	105	
1	22,5	1,931	"	1,3	26	

Inductor + Electromagnet.

3	24,0	2,075	22	11,7	242	Kleinste
4	30,5	2,746	22,25	6,8	139	Grösste
3	24,5	2,124	22	3,1	63	Grösste

VI. Platinecontact.

Anzahl der Elemente	α	s	n	L	$10^5 t$	Unterbrechungsgeschw.
4	35,5	3,326	23	0	0	Kleinste
4	55,0	6,658	"	11,3	223	
3	49,8	5,508	"	5,2	102	
2	43,0	4,349	"	1,7	33	
4	55,5	6,784	"	12,1	239	
4	53,8	6,359	"	10,4	206	
3	46,3	4,870	"	2,9	57	
1	25,5	2,224	"	0	0	
2	39,0	3,776	"	0,4	8	
4	55,0	6,658	23	6,4	127	Grösste
3	49,5	5,459	"	2,8	55	
2	42,5	4,272	"	1,2	24	

VII. Quecksilbercontact.

4	53,3	6,245	23	21,0	415	Kleinste
3	45,0	4,662	"	15,5	306	
2	38,0	3,642	"	7,8	154	
1	21,5	1,836	"	1,9	37	
4	48,0	5,178	"	16,3	323	

B. Grosser Weinhold'scher Inductor.

I. Stahlcontact.

 α . Kleinste Unterbrechungsgeschwindigkeit.

Anzahl d. Elem.	α	s	n	L	$10^5 t$	Inductor-zusammensetzung	
3	27,3	2,498	22,67	27,3	551	Hintereinanderschaltung	Ohne Condensator
2	19,1	1,676	22,67	16,4	381		
1	11,0	0,941	22,67	2,9	58		
4	32,4	3,071	22,67	35,2	711		
5	38,0	3,781	12,67	27,3	988		
6	40,4	4,119	12,67	31,0	1122		
3	26,9	2,455	22,67	20,2	408	Hintereinanderschaltung	Mit Condensator
2	20,1	1,771	22,67	4,5	91		
1	11,0	0,941	22,67	0			
4	30,5	2,850	22,67	25,6	517		
5	37,3	3,686	12,67	23,3	844		
6	40,0	4,060	12,67	28,3	1025		
3	40,9	4,192	22,67	20,8	420	Parallelschaltung	Ohne Condensator
2	37,6	3,727	22,67	12,5	252		
1	19,3	1,695	22,67	2,9	58		
4	49,9	5,73	22,67	26,7	539		
5	52,4	6,27	12,67	20,9	756		
6	52,4	6,27	12,67	22,0	796		

α . Kleinste Unterbrechungsgeschwindigkeit (Fortsetzung).

Anzahl d. Elem.	α	β	n	L	$10^5 t$	Inductor. zusammensetzung	
3	40,1	4,076	22,67	17,9	361	Parallel-schaltung	Mit Condensator
2	38,0	3,781	22,67	9,4	190		
1	21,9	1,946	22,67	1,8	36		
4	49,0	5,56	22,67	24,6	497		
5	52,1	6,21	12,67	20,3	735		
6	54,4	6,75	12,67	21,4	774		

β . Mittlere Unterbrechungsgeschwindigkeit.

4	33,3	3,179	22,33	29,5	605	Hintereinanderschaltung	Ohne Condensator
6	39,4	3,976	12,5	23,9	876		
5	34,8	3,364	12,5	18,6	683		
2	18,0	1,572	22,67	8,1	184		
1	13,8	1,188	22,67	5,2	105		
3	27,9	2,562	22,67	22,6	456		

4	33,4	3,190	22,33	28,0	574	Hintereinanderschaltung	Mit Condensator
6	39,1	3,932	12,5	21,9	803		
5	34,8	3,364	12,5	16,3	598		
2	19,6	1,723	22,67	1,3	26		
1	14,0	1,206	22,67	0	0		
3	27,0	2,465	22,67	16,4	331		

4	48,8	5,52	22,33	19,3	396	Parallel-schaltung	Ohne Condensator
6	49,5	5,66	12,5	12,4	454		
5	48,3	5,43	12,5	11,2	411		
2	38,4	3,836	22,67	10,0	202		
1	28,5	2,628	22,67	5,4	109		
3	42,0	4,358	22,67	11,9	240		

6	51,5	6,08	22,0	20,8	434	Parallel-schaltung	Mit Condensator
6	48,3	5,43	12,5	11,4	418		
5	49,3	5,62	"	11,4	418		
2	37,1	3,660	22,67	9,3	188		
1	29,5	2,738	"	1,9	38		
3	42,6	4,450	"	11,3	228		

γ . Grösste Unterbrechungsgeschwindigkeit.

2	20,9	1,847	22,33	5,5	113	Hintereinanderschaltung	Ohne Condens.
4	34,5	3,326	"	20,2	414		
3	28,4	2,617	"	14,7	301		
1	11,1	0,950	"	1,9	39		
2	22,4	1,994	22,33	0	0		
2	19,0	1,666	"	0	0		

4	34,4	3,318	"	17,4	357	Parallelschaltung	Mit Condens.
3	28,6	2,639	"	12,3	252		
1	24,5	2,205	22,33	1,5	31		
2	39,8	4,032	"	6,4	131		
3	45,9	4,995	"	10,5	215		
4	51,9	6,172	"	16,1	330		

4	51,6	6,10	22,33	15,2	312	Parallelschaltung	Mit Condens.
3	46,3	5,05	"	10,2	209		
2	40,0	4,060	"	6,5	133		
1	23,9	2,144	"	0	0		

II. Silbercontact.

 α . Kleinste Unterbrechungsgeschwindigkeit

Anzahl d. Elem.	α	s	n	L	$10^5 t$	Inductor- zusammensetzung	
4	35,5	3,451	23,0	32,6	648	Hintereinander- schaltung	Ohne Condens.
3	29,9	2,783	"	26,8	532		
2	22,0	1,955	"	18,1	360		
1	11,0	1,019	"	8,3	165		
6	40,5	4,133	"	38,9	773		
4	36,3	3,554	23,0	10,8	214		
3	30,6	2,863	"	5,1	102	Hintereinander- schaltung	Mit Condens.
2	23,5	2,103	"	2,3	46		
6	39,3	3,961	"	17,5	348		
1	13,0	1,117	"	0	0		

 β . Grösste Unterbrechungsgeschwindigkeit.

6	41,0	4,206	23,0	20,4	406	Hintereinander- schaltung	Ohne Condens.
4	33,1	3,155	"	16,1	320		
3	25,8	2,339	"	11,3	225		
2	23,1	2,064	"	6,3	125		
1	12,9	1,108	"	2,7	53		
6	40,6	4,148	23,0	16,2	322	Hintereinander- schaltung	Mit Condens.
4	33,3	3,179	"	13,6	270		
3	26,8	2,445	"	10,3	205		
2	21,4	1,897	"	1,2	24		
1	12,5	1,073	"	0	0		

Zusammenstellung der Zeitwerthe τ_1 und τ_2 in Secunden für Funkenlängen von 1 mm bei den verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten des Spiegels. (Vgl. p. 347.)

n	τ_1	τ_2	n	τ_1	τ_2
12,5	—	0,000 367	22,33	—	0,000 205
12,67	—	0,000 362	22,5	0,000 202	—
22,0	0,000 207	0,000 209	22,67	0,000 201	0,000 202
22,25	0,000 204	—	23,0	0,000 198	0,000 199

Um noch die Differenzen zu zeigen, welche zwischen den Versuchen ein und derselben Reihe bestehen, mögen einige Versuchsreihen ausführlich angegeben werden:

3 Elemente $\alpha = 27,3$ $s = 2,498$ $n = 22,67$									
$l = 27$	25	30	28	30	27	25	26	27	27
	27	26	26	27	25	30	28	30	28

Mittel: $L = 545 : 20 = 27,3$ $t = 0,00551$.

2 Elemente $\alpha = 19,1$ $s = 1,676$ $n = 22,67$									
$l = 16$	16	18	15	16	16	18	16	18	16
	15	18	17	18	15	17	15	16	18

Mittel: $L = 345 : 21 = 16,4$ $t = 0,00331$.

	1 Element $\alpha = 11,0$ $s = 0,941$ $n = 22,67$								
$l = 3$	3	3	3	2	2	2	4	3	2,5
	3	2,5	2	5	3	3	4	4.	
Mittel: $L = 56 : 19 = 2,9$ $t = 0,00058.$									

	4 Elemente $\alpha = 32,4$ $s = 3,071$ $n = 22,67$								
$l = 33$	34	36	38	33	38	32	30	37	40
	38	35	40	32	30	37	35	38.	33
Mittel: $L = 669 : 19 = 35,2.$									

	5 Elemente $\alpha = 38$ $s = 3,781$ $n = 12,67$								
$l = 25$	27	23	27	25	24	30	31	31	24
	28	30	28	30	27	24	29	28.	28
Mittel: $L = 519 : 19 = 27,3.$									

	6 Elemente $\alpha = 40,4$ $s = 4,119$ $n = 12,67$								
$l = 35$	29	30	30	33	31	34	30	35	30
	31	29	27	32	32	31	28	32.	30
Mittel: $L = 589 : 19 = 31,0.$									

Stellt man die Resultate der vorstehenden Beobachtungen geometrisch dar, indem man zu Abscissen die Stromstärken und zu Ordinaten die zugehörigen Funkendauern wählt, so stellen die entsprechenden Curven zum grössten Theil eine annähernd geradlinige Abhängigkeit der Funkendauer von der Stromstärke dar, mit Ausnahme derjenigen Curven, die sich aus den Versuchen mit dem grossen Inductor bei Parallelschaltung ergeben. Da die Funkendauer erst bei gewissen Werthen der Stromstärke beginnt messbar zu werden und für alle kleineren Intensitäten den Werth $t=0$ annimmt, erhellt, dass dem Werthe 0 der Funkenlänge nur eine relative Bedeutung zukommen kann.

Der Einfluss der Unterbrechungsgeschwindigkeit ist bei niedrigen Werthen der Stromstärke gering, wird aber mit zunehmender Stromstärke bedeutender, und zwar ist dann die Funkendauer um so kleiner, je schneller die Stromunterbrechung vollzogen wird.

Bei Anwendung des grossen Inductionsapparates ist für den Fall der Hintereinanderschaltung infolge der grösseren Spannung und der stärkeren Wirkung der Extrastrome die Funkendauer ungleich grösser als bei Benutzung des kleinen Inductors, während bei Parallelschaltung die Unterschiede fast ganz verschwinden. Die Anwendung des Condensators

beim grossen Inductionsapparate bewirkt in allen Fällen eine Verminderung der Funkendauer, ein Unterschied, der beim kleinen Inductor unmerklich war, weshalb auch hier die Versuche lediglich unter Anwesenheit der Condensationsvorrichtung ausgeführt wurden.

Von den verschiedenen Metallen zeigen Stahl und Kupfer ein wesentlich gleiches Verhalten; das leichter verbrennbare Zink liefert unter sonst gleichen Umständen grössere Funkendauern, Silber aber kleinere. Die relativ kleinsten Funken unter allen in Frage gekommenen Metallen liefert das Platin.¹⁾

Für eine Anzahl von Versuchen sind neben der Funkendauer und mit Zugrundelegung der dafür gefundenen Werthe diejenigen Wegstrecken berechnet worden, zwischen denen der Funken die auseinandergehenden Contactstifte noch verbindet. Die Berechnung wurde unter Annahme einer gleichförmig verzögerten Bewegung nach der Formel $s = ct - (p/2)t^2$ ausgeführt (vgl. p. 347). Da aber t^2 sehr klein ist, bleibt das Glied $(p/2)t^2$ zumeist ohne Einfluss; es besteht also zwischen Funkendauer und Weglänge directe Proportionalität, womit sich denn auch die Vermuthung, dass möglicherweise die zu gleichen Stromstärken gehörigen Wege, auch bei verschiedenen Unterbrechungsgeschwindigkeiten, gleiche Grösse haben könnten, als irrig erwies.

Es ist ferner durch eine Reihe von Versuchen der Nachweis geliefert worden, dass die secundären Funken erst dann entstehen, wenn der primäre Funken aufhört, d. h. also nach vollzogener Stromunterbrechung. Dazu wurde der secundäre Strom nach der Unterbrechungsstelle des primären hingeleitet, sodass beide Funken zugleich im rotirenden Spiegel beobachtet werden konnten. Ein kleines Gestell mit den Kupferdrähten, zwischen denen der secundäre Funken überspringen sollte, wurde bei zunächst stillstehendem Spiegel so aufgestellt, dass die punktförmigen Bilder sowohl des primären als auch des secundären Funkens genau senkrecht untereinander fielen. Dann ergaben aber die Beobachtungen übereinstimmend das Resultat, dass bei Linksdrehung des

1) G. Wiedemann, Electricität. 4. 2. p. 717 u. 756.

Spiegels die Secundärfunken immer unter das linke Ende der entstandenen Lichtlinie des primären Funkens und bei Rechtsdrehung des Spiegels entsprechend unter das Ende der Lichtlinie zur rechten Hand fielen. Das aber würde die oben genannte Thatsache bestätigen.

Bei diesen Beobachtungen machte es sich nothwendig, dass der zu lebhafte primäre Funken durch dunkelfarbiges Glas abgeblendet wurde, da sonst der secundäre Funken, namentlich bei Rotation des Spiegels, nicht sichtbar blieb.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass das Petroleum ein einfaches Mittel ist, um die oft nachtheilig wirkende Zwischenzeit vom Beginne des primären Funkens bis zum Entstehen des secundären zu annulliren, wenigstens bei Anwendung nicht grösserer Inductionsapparate als des gewöhnlichen Stöhrer'schen. So ergab sich z. B. nach Bestreichen der Stahlcontactstifte mit Petroleum unter Anwendung zweier Elemente ($\alpha = 36,5^\circ$) die Dauer des primären Funkens bei 21 Beobachtungen stets = 0.

Ja, es zeigten sogar die folgenden Beobachtungen, nach sorgfältigem Abputzen der Contactstifte, noch eine Verkürzung des primären Funkens bis auf 1—2 mm gegenüber der gewöhnlichen Funkenlänge bei dieser Stromstärke von 11,2 mm. Auch bei Anwendung von 5 Elementen ($\alpha = 45^\circ$) war die Wirkung des Petroleums die nämliche. Nicht so durchschlagend, wie beim Stahlcontact und Kupfercontact erwies sich die Wirkung des Petroleums bei Zink, Silber- und Platincontact. Hier musste man, um ganz sichere Wirkung zu erreichen, vor jedem einzelnen Versuche die Contactstifte frisch mit Petroleum benetzen.

Beim grossen Weinhold'schen Inductor gelang es weder durch flüssiges Petroleum, noch auch durch Vaseline, die Funkenlänge auf 0 zurückzuführen, wenngleich in allen Fällen eine wesentliche Verkürzung der Funkendauer constatirt werden konnte.

**X. Ueber die Grundgleichung der stationären Induction durch rotirende Magnete und über eine neue Classe von Inductionerscheinungen;
von E. Budde.**

(Hierzu Taf. IV Fig. 22.)

§ 1. Vorbemerkung. Ich glaube, es wäre ein wesentlicher Vortheil, wenn alle deutschen Physiker sich entschlossen, sich an gewisse Conventionen über die Vorzeichen wichtiger Begriffe zu binden. In Bezug auf Anordnung dreiaxiger Coordinatensysteme, Vorzeichnung der Potentialfunctionen etc., Richtung von Flächennormalen u. dgl. herrscht bei uns noch ziemliche Willkür, sodass, wenn man die Rechnungen eines Autors benutzen will, man meist genöthigt ist, erst eine Untersuchung über seine Vorzeichen anzustellen. Wem schweben nicht gleich ein halbes Dutzend $+$ und $-$ vor Augen, wenn er z. B. an das Gauss'sche Oberflächenintegral der Kräfte bei verschiedenen Schriftstellern denkt? In der reinen Mathematik ist die Willkür der Zeichengebung zum Theil berechtigt, zum Theil sogar unentbehrlich; für den Physiker — besonders auch für den Lernenden — ist sie ein offener Nachtheil; feste Gedächtnissregeln und bequeme Vergleichbarkeit der Formeln erhält man nur dann, wenn man sich ein für allemal an bestimmte Conventionen hält. Da irgend jemand vorangehen muss, so erlaube ich mir, hiermit folgende Vorschläge zu machen:

1) Abstossende Kräfte werden ein für allemal positiv gerechnet.

Grund: Für einen Punkt, der vom Coordinatenfang abgestossen oder angezogen wird, stimmen nur bei dieser Vorzeichnung die Vorzeichen der Kräfte mit denen der Beschleunigung.

2) Glaselectricität und nordweisender Magnetismus sind positiv. Der Satz wird hier nur angeführt zur Begründung des Folgenden.

3) Dreiaxige Coordinatensysteme sind ein für allemal so anzuordnen, dass für ein Auge, welches vom Negativen zum

Positiv
rechts
nach
H
träglich
von p
nach
quent
rechn
obige
 $+y$
tricitä
Neben
die R
Die m
ihre
dem
M
eines
jenige
man
In A
sodas
geric
nega
pone
Auto
der
schlo
geric
male
Kräf
nissr

Positiven hin an der ersten Axe entlang schaut, die dritte rechts von der gleichnamigen zweiten liegt. Beispiel: $+x$ nach Osten, $+y$ nach Norden, $+z$ nach oben.

Hauptgrund: Nur diese Anordnung ist mit Satz 2 verträglich. Lassen wir nämlich in der xy -Ebene einen Strom von positiver Electricität in der positiven Richtung von $+x$ nach $+y$ hin um den Anfangspunkt kreisen, so ist consequenter Weise der Magnetismus des Stromes positiv zu rechnen nach der Seite der positiven z hin; das ist beim obigen System der Fall. (In einem System $+x$ nach Osten, $+y$ nach Norden, $+z$ nach unten müsste, wenn Glaselectricität positiv ist, nordweisender Magnetismus negativ sein.) Nebengründe: positive Drehungen sind rechtläufig. Für die Rotation der Erde ist der Nordpol positiv. Die meisten mir bekannten Professoren zeichnen ihre Coordinatensysteme beim Unterricht nach dem Schema



Nach dem Vorstehenden ist selbstverständlich: die Axe eines beliebigen rotirenden Körpers ist positiv nach derjenigen Richtung, in welche die positive z -Axe fällt, wenn man annimmt, die Drehung geschehe von $+x$ nach $+y$ hin. In Ampère'scher Formulirung: Dreht ein Mensch sich mit, sodass der Kopf vorangeht und das Gesicht nach der Axe gerichtet ist, so liegt die positive Axenhälfte links.

4) Die Potentialfunction V ist diejenige Grösse, deren negativ genommener Differentialquotient nach x die x -Componente der Beschleunigung ist. Grund: Gebrauch der besten Autoren; Energie gleich Potential plus lebendiger Kraft.

5) $\Delta^2 V = + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)$. Grund: die Einfachheit der Beziehung.

6) Spricht man schlechthin von der Normale einer geschlossenen Fläche S , so ist die Normale stets nach aussen gerichtet zu denken.

Grund: Bei positivem Inhalt der Fläche hat die Normale dasselbe Vorzeichen, wie die vom Inhalt ausgehenden Kräfte; (5) und (6) liefern zugleich die einfachste Gedächtnissregel für eine Anzahl wichtiger Formeln; siehe unten.

Consequenzen aus (1) bis (6). M sei eine magnetische oder electriche Quantität. Dann gestalten sich in den wichtigsten Sätzen die Vorzeichen wie folgt:

a) Potentialfunction: $V = \int \frac{dM}{r}.$

b) Gauss'scher Oberflächensatz, N die Normale, dS das Element der Fläche:

$$\iint \left(X \frac{\partial x}{\partial N} + Y \frac{\partial y}{\partial N} + Z \frac{\partial z}{\partial N} \right) dS = 4\pi M$$

oder:

$$- \int \frac{dV}{dN} dS = 4\pi M.$$

c) Laplace-Poisson'sche Gleichung, wenn κ die körperliche Dichtigkeit der Ladung ist:

$$\Delta^2 V = -4\pi \kappa.$$

d) Beziehung zwischen dem Gauss'schen Oberflächenintegral und $\Delta^2 V$, wenn dk das Element des von der Fläche S umschlossenen Raumes ist:

$$\int \frac{dV}{dN} dS = \int \Delta^2 V dk.$$

e) Green'scher Satz:

$$\int U \Delta^2 V dk = \int U \frac{dV}{dN} dS - \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dk$$

oder, wenn u und v die Dichtigkeiten der Ladungen sind, welche die Potentialfunctionen U und V erzeugen:

$$-4\pi \left[\int U v dk - \int V u dk \right] = \int U \frac{dV}{dN} dS - \int V \frac{dU}{dN} dS.$$

f) Charakteristische Gleichung der Flächenladungen: N sei die nach aussen, $-N$ die nach innen gezogene Normale der Fläche S , σ die Flächendichtigkeit der Ladung:

$$\frac{\partial V}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial(-N)} = -4\pi \sigma;$$

g) Vectorpotentiale. S sei eine begrenzte Fläche, s ihre Grenzlinie. Bei Anwendung der Stokes'schen Grundgleichung ist diejenige Normale von S als die positive anzusehen, für welche das Vectorpotential rechtläufig ist, oder welche von der nordmagnetischen Seite von S ausgeht, wenn wir s von

einem durchfl.
Linie s
seine D
potenti

entspri
Di

Gedäch
komme

ich au
obige C
sich de

die Be
Electri
m' hab

Di
hingest
vention

wird.
drunge

den Vo
In
§

Abhan
Potent
Induct

dynam
Allgem
Grund

Magne
nach o

mann.
legung
nach i

1) C
2) I

einem Strom positiver Electricität in derjenigen Richtung durchflossen denken, in welcher das Vectorpotential die Linie s umläuft. Das ist von Maxwell bereits geschehen; seine Definition: „wenn F, G, H die Componenten des Vectorpotentials, X, Y, Z die der Kraft sind, so ist:

$$X = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

entspricht der obigen Convention.

Die Nummern (b) bis (f) liefern eine äusserst einfache Gedächtnissregel: „In allen Gleichungen, wo V und π vorkommen, steht einerseits ein Minuszeichen.“ Deshalb habe ich auch für die zweite Form des Green'schen Satzes die obige Gestalt gewählt. Die Newton'sche Gravitation lässt sich den obigen Gleichungen vollständig subsumiren durch die Bemerkung: „Ponderable Masse wirkt wie imaginäre Electricität“, denn die ponderablen Massentheilchen m und m' haben das Potential $im \cdot im' / r$, wo $i = \sqrt{-1}$.

Die meisten Physiker benutzen bereits das im obigen hingestellte System. Ihren vollen Nutzen äussert die Convention aber erst dann, wenn sie ausschliesslich gebraucht wird. Und da von den Berufeneren niemand darauf gedrungen hat, dass das geschehe, so erlaube ich mir, hiermit den Vorschlag dazu zu machen und um Zustimmung zu bitten.

Im Folgenden sind die obigen Conventionen angewendet.

§ 2. Die Entwicklungen, welche Clausius in seiner Abhandlung¹⁾ „über die Anwendung des electrodynamischen Potentials etc.“ niedergelegt hat, gestatten, das Problem der Induction durch rotirende Magnete auf Grund der electrodynamischen Punktgesetze in einer bisher nicht erreichten Allgemeinheit und Schärfe zu behandeln. Die allgemeine Grundgleichung für die stationäre Induction eines rotirenden Magnets soll im Folgenden entwickelt werden, und zwar nach den drei Gesetzen von Weber, Clausius und Riemann. Die Mittel zur Lösung der Aufgabe bei Zugrundelegung der beiden letzteren Gesetze sind der Hauptsache nach in meiner Abhandlung²⁾ „Mittel zur praktischen Ent-

1) Clausius, Wied. Ann. 11. p. 249. 1880.

2) Budde, Wied. Ann. 30. p. 100. 1887.

scheidung zwischen den Grundgesetzen von Weber, Riemann und Clausius“ gegeben; bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes ist die Lösung einfach Sache der directen Rechnung.

Es sei K irgend ein mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe rotirender Körper, der magnetische Theile enthält. Die Anordnung der letzteren sei willkürlich, nicht magnetische Theile von K seien keineswegs ausgeschlossen. Ein ruhender Draht s werde mit seinen beiden Enden s_1 und s_2 dem Körper K dauernd angelegt; damit das möglich sei, muss K an den Stellen, wo s_1 und s_2 ihn berühren, die Form eines Rotationskörpers haben, dessen geometrische Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt; diese Bedingung sei erfüllt, im übrigen aber die Form von K willkürlich. Im allgemeinen wird in s ein System von zwei superponirten electrischen Strömen entstehen. Die eine Strömung, i_1 , hat ihren Grund in der unregelmässigen Vertheilung des Magnetismus in K . Infolge derselben ändert sich, wenn K den Winkel $d\theta$ zurücklegt, der Werth seiner magnetischen Potentialfunction in irgend einem Drahtelement ds ; daraus entsteht ein Strom in s , der, weil jene Aenderung periodisch sein muss, offenbar ein Wechselstrom ist. Die andere Strömung, i_2 , ist diejenige, welche man z. B. bei der gewöhnlichen Beobachtungsweise „unipolarer“ Inductionen wahrnimmt; sie rührt nicht von den Unregelmässigkeiten der magnetischen Vertheilung her, sondern von der stationären mittleren Vertheilung des Magnetismus rings um die Drehungsaxe; sie ist deshalb nicht periodisch, sondern stationär. Je nach der Beobachtungsmethode kommen die beiden Theilströme i_1 und i_2 zusammen oder getrennt zur Geltung. Ein in s eingeschaltetes Telephon gibt nur i_1 an, ein Galvanometer bei rascher Drehung von K nur i_2 , ein Dynamometer wird von beiden afficirt.

Wir setzen nun voraus, die Beobachtung werde mit dem Galvanometer gemacht; die Untersuchung bezieht sich auf den stationären Strom i_2 . Die Drehungsaxe nehmen wir zur Axe der z in einem rechtwinkligen Coordinatensystem. Den Raum, welchen der Körper K bei seinen Drehungen bestreicht, theilen wir zunächst in Elementarringe: irgendwo in dem-

selben Ebene. Umfang recht z fällt. $d\omega d\omega$ ganze hören, hat jed $\mu d\omega d\omega$ richtet $A, B,$ sie con die Ro wenn v in den positiv derselb gericht die Ric ein Pun läuft, d tiv, we fällt. der No In Element nach e haben, kommt offenba rotiren jede st einerle dieselb ponent $A, B,$ der Gr

selben werde ein Flächenelement $d\omega$ angenommen, dessen Ebene durch die z -Axe geht, und durch jeden Punkt des Umfangs von $d\omega$ werde ein Kreis gelegt, dessen Ebene senkrecht zur z -Axe steht, und dessen Mittelpunkt in die z -Axe fällt. So entsteht ein Ring σ , dessen Element den Inhalt $d\omega d\sigma$ hat. Zu irgend einem Zeitpunkt t wird entweder der ganze Ring oder ein Theil desselben dem Körper K angehören, ein Theil kann auch ausserhalb K liegen. Jedenfalls hat jedes Element $d\omega \cdot d\sigma$ ein gewisses magnetisches Moment $\mu d\omega d\sigma$, wo μ entweder Null oder eine endliche beliebig gerichtete Grösse ist. μ zerfällt in drei Componenten, die wir A, B, C nennen wollen, und die wir so wählen können, dass sie constant bleiben, wenn das Element $d\omega d\sigma$ sich durch die Rotation von K um die z -Axe dreht. Das geschieht, wenn wir festsetzen: die Componente A ist radial; sie fällt in den Radius p , der von $d\omega d\sigma$ zur z -Axe hinführt. Sie ist positiv zu rechnen, wenn der nordweisende Magnetismus derselben nach aussen, der südweisende nach der z -Axe hin gerichtet ist. Die Componente B ist tangential, sie fällt in die Richtung von $d\sigma$; $d\sigma$ selbst wird positiv gerechnet, wenn ein Punkt, der, der Richtung von $d\sigma$ folgend, den Ring durchläuft, die z -Axe mit positiver Drehung umkreist; B ist positiv, wenn sein Nordmagnetismus in die positive $d\sigma$ -Richtung fällt. C endlich ist axial, parallel zur z -Axe, positiv, wenn der Nordmagnetismus nach der positiven z -Richtung hin liegt.

Im Laufe einer Umdrehung nimmt nun ein bestimmtes Element $d\omega d\sigma_1$ irgend eines Ringes die Plätze der Reihe nach ein, welche alle anderen Elemente von σ zur Zeit t haben, und jedes andere Element $d\omega d\sigma_2$ desselben Ringes kommt einmal an die Stelle von $d\omega d\sigma_1$. Daraus folgt nun offenbar: Nehmen wir die Mittelwerthe von A, B, C über den rotirenden Elementarring σ und nennen sie $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, so ist jede stationäre Mittelwirkung, die von dem Ring σ ausgeht, einerlei ob rein magnetischer oder electrodynamischer Art, dieselbe, als ob jedes Element von σ die drei Momentcomponenten $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ mal $d\omega d\sigma$ hätte. Die Resultante aus $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ nennen wir $\bar{\mu}$. Dann ist $\bar{\mu}$ auf dem ganzen Ring der Grösse nach constant und macht überall mit z, p und

$d\sigma$ dieselben Winkel. Einen Idealkörper \bar{K} , dessen Elementarringe sämmtlich die Eigenschaft haben, dass A, B, C in jedem Ring constant sind, wollen wir „axocentrisch magnetisirt“ nennen. Dann folgt aus dem Vorstehenden: Für die Berechnung der electrodynamischen Wirkungen des rotirenden K können wir dies K ersetzen durch einen axocentrischen Magnet \bar{K} . Seiner Gestalt nach ist \bar{K} der Rotationskörper, der sämmtliche Lagen von K einhüllt; jeder Elementarring σ von \bar{K} fällt zusammen mit einem Elementarring σ von K , und die Componenten der Magnetisirungsintensität von σ sind die mittleren Werthe $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ der drei Componenten A, B, C , welche sämmtlichen Theilen von σ (die leeren mitgerechnet) zukommen. Wollen wir die electrodynamischen Wirkungen des rotirenden K mit seinen magnetischen Wirkungen vergleichen, so sind auch die magnetischen Wirkungen auf den Idealkörper \bar{K} zu beziehen; sie müssen also, wenn man genau verfahren will, am rotirenden K experimentell bestimmt werden. Diese Forderung kommt dem Bedürfniss des Experimentators, wenn er mit wirklich unregelmässig vertheilten Magnetismen arbeiten will, entgegen; denn da dürfte die Bestimmung am rotirenden K überhaupt das einzige practicable Mittel sein, um seine stationären Mittelwirkungen jeder Art kennen zu lernen.

Wir substituiren also ein für allemal \bar{K} an Stelle von K und haben uns dann im Folgenden nur mit axocentrischen Magneten zu befassen. Da ist ohne weiteres klar, dass die Momentanwirkung, die ein solcher zur Zeit t ausübt, zugleich seine stationäre Wirkung für constantes $d\vartheta/dt$ ist, wenn ϑ der Drehungswinkel. Ferner ist folgende Bemerkung von Nutzen: Ist irgend eine Elementarwirkung, die aus der Rotation von \bar{K} hervorgeht, und die sich auf einen ausserhalb ruhenden Punkt e oder m bezieht, ein genauer Differentialcoëfficient nach t , so ist sie zugleich ein genauer Differentialcoëfficient nach σ und ϑ , verschwindet also bei der Integration über jeden Elementarring, wie sie bei der Integration nach t über eine ganze Umdrehung verschwinden würde.

Da wir im Folgenden blos mit Mittelwerthen von A, B, C, μ zu thun haben, kann die besondere Bezeichnung der-

selben
wir sch
§
trigono
werden
kleinem
rotire
oder e
tricität
tion vo
heissen
das Kr
beiden
stellen;

(1)

(2)

Hierin
intensit
sich au
Bewegu
ist über
ganzen
W

Ist
 $dy/dt =$
da
 d

De
§, η , ζ ,

Im
auf der

selben durch einen übergesetzten Strich fortgelassen werden; wir schreiben bis auf weiteres K , A u. s. w. statt \bar{K} , \bar{A} u. s. w.

§ 3. In diesem Paragraphen sollen die vorbereitenden trigonometrischen Rechnungen und Integrationen abgemacht werden. Wir betrachten einen Kreisstrom von verschwindend kleinem Radius a ; er heisse s' , liege fest im Körper K und rotire mit diesem um die z -Axe. Ferner sei ein Punkt ϵ oder e gegeben, in dem wir uns eine Einheit positiver Electricität concentrirt denken; ϵ soll, e soll nicht an der Rotation von K theilnehmen. Die Seitengeschwindigkeiten von ϵ heissen dx/dt etc. e oder ϵ habe die Coordinaten x, y, z ; das Kreiselement ds' habe x', y', z' ; der Abstand zwischen beiden sei r . Wir gehen darauf aus, zwei Ausdrücke herzustellen; dieselben sind:

$$(1) \quad X_e = ki' \int ds' \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \sum \frac{dx \partial x'}{\partial t \partial s'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right].$$

$$(2) \quad X_w = ki' \int ds' \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} \right].$$

Hierin ist k die Inductionsconstante, i' die constante Stromintensität im Kreise s' , und die Differentiation $\partial/\partial t$ bezieht sich auf Aenderungen, welche durch die blosse mechanische Bewegung von K hervorgebracht werden. Die Integration ist über den Kreis s' auszudehnen und späterhin auf den ganzen Körper K zu erstrecken, der zahllose Kreise s' enthält.

Wir setzen in (1) den Drehungswinkel von ϵ gleich γ ,

$$x = b \cos \gamma \quad y = b \sin \gamma \quad z = z.$$

Ist $d\vartheta/dt$ die Winkelgeschwindigkeit von K , so ist $d\gamma/dt = d\vartheta/dt$; also:

$$\frac{dx}{dt} = -b \sin \gamma \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos \gamma \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

$$\frac{dx}{dt} = -y \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = x \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Der Mittelpunkt des Kreises s' habe die Coordinaten ξ, η, ζ , und:

$$\xi = p \cos \vartheta, \quad \eta = p \sin \vartheta, \quad \zeta = \zeta.$$

Im Mittelpunkte von s' errichten wir ein Perpendikel auf der Ebene des Kreises s' , und zwar nach der magneti-

schen Nordseite der Kreisfläche hin; dasselbe heisse die Axe des Stromkreises. Mit der positiven (nach aussen gerichteten) Richtung von p mache die Axe des Kreises den Winkel ψ , und eine durch sie und durch p gelegte „Ebene der pu “, mache mit der pz -Ebene den Winkel χ , der positiv ist in der Richtung einer positiven Drehung um die positive p -Richtung. Durch ξ, η, ζ legen wir drei Hilfsaxen der p, u, v . Die erste von diesen habe die Richtung von p , die zweite liege senkrecht zu ihr, sodass sie durch eine Drehung der pu -Ebene um $-\chi$ in die Richtung der positiven z übergeführt werden würde, die dritte senkrecht zu beiden in der durch die Convention des § 1 bestimmten Richtung. Dann ergibt die Betrachtung der sphärischen Dreiecke auf einer um ξ, η, ζ als Mittelpunkt gelegten Kugel für die Cosinus der neun Winkel, welche die Axen der u, v, w mit den Axen der x, y, z machen, folgende Tabelle:

Winkel von	x	y	z
mit p	$\cos \vartheta$	$\sin \vartheta$	0
„ u	$\sin \vartheta \sin \chi$	$-\cos \vartheta \sin \chi$	$\cos \chi$
„ v	$\sin \vartheta \cos \chi$	$-\cos \vartheta \cos \chi$	$-\sin \chi$

Die neun Grössen genügen den bekannten neun Gleichungen für die Verschiebungsparameter rechtwinkliger Coordinatensysteme. Der Radius a , welcher von $\xi \eta \zeta$ zu ds hinführt, macht nun mit den Axen der p, u, v die Winkel, deren Cosinus sind:

$$-\sin \psi \cos \varphi, \quad \cos \psi \cos \varphi, \quad \sin \varphi,$$

wenn φ der Winkel ist, den a mit dem in die pu -Ebene fallenden Radius von s' macht, positiv in der Richtung des in s' kreisenden Stromes. Hieraus finden sich die Winkel, welche a mit den Axen der x, y, z macht, nach bekannter Formel, und damit die Coordinaten von ds' :

$$\begin{aligned} x' &= p \cos \vartheta + a(-\cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \chi \cos \psi \cos \varphi \\ &\quad + \sin \vartheta \cos \chi \sin \varphi), \\ y' &= p \sin \vartheta + a(-\sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \chi \cos \psi \cos \varphi \\ &\quad - \cos \vartheta \cos \chi \sin \varphi), \\ z' &= \zeta + a(\cos \chi \cos \psi \cos \varphi - \sin \chi \sin \varphi). \end{aligned}$$

Es ist ferner von Interesse, die Winkel zu kennen, welche

die Axen
rechten
die drei
nen; da

$\frac{A}{\mu} =$
Da
B positiv
De
sofort

ist, ein
bei den
der sich
ferner

$$\frac{\partial x'}{\partial s} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial s} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial s} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)$$

Für
drücke
bedeut
GL (1)
findet

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

die Axe des Kreises s' mit der Axe der p , mit einer Senkrechten zu p und z , und mit der z -Axe macht; wir können die drei Cosinus dieser Winkel mit A/μ , B/μ , C/μ bezeichnen; dann ist:

$$\frac{A}{\mu} = \cos \psi, \quad \frac{B}{\mu} = -\sin \psi \sin \chi, \quad \frac{C}{\mu} = \sin \psi \cos \chi.$$

Dabei ist, wie oben festgesetzt, A positiv nach aussen, B positiv im Sinne der positiven $d\vartheta/dt$ gerechnet.

Den vorstehenden Gleichungen für x' , y' , z' sieht man nun sofort an, dass:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -y' \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{\partial y'}{\partial t} = x' \frac{d\vartheta}{dt}$$

ist, eine später brauchbare Relation. Sie beruht darauf, dass bei den angewandten Coordinaten ϑ der einzige Winkel ist, der sich bei der Rotation um die z -Axe ändert. Wir bilden ferner die Ausdrücke $\partial x'/\partial s'$ etc. und $(\partial/\partial t)(\partial x'/\partial s')$ etc. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial s'} &= \frac{1}{a} \frac{\partial x'}{\partial \varphi} = \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi - \sin \vartheta \sin \chi \cos \psi \sin \varphi \\ &\quad + \sin \vartheta \cos \chi \cos \varphi, \\ \frac{\partial y'}{\partial s'} &= \sin \vartheta \sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \sin \chi \cos \psi \sin \varphi - \cos \vartheta \cos \chi \cos \varphi, \\ \frac{\partial z'}{\partial s'} &= -\cos \chi \cos \psi \sin \varphi - \sin \chi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die einfachen Relationen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right) = -\frac{d\vartheta}{dt} \frac{\partial y'}{\partial s'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y'}{\partial s'} \right) = \frac{d\vartheta}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z'}{\partial s'} \right) = 0.$$

Führt man dies und zugleich die oben gegebenen Ausdrücke für dx/dt etc. in Gl. (1) ein, so ergibt sich eine bedeutende Vereinfachung derselben. Schreiben wir nämlich Gl. (1) gleich für alle drei Coordinatenrichtungen hin, so findet sich:

$$(3) \quad \begin{cases} X_c = k i' \frac{d\vartheta}{dt} \int ds' \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \left(-y \frac{\partial x'}{\partial s'} + x \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial y'}{\partial s'} \right], \\ Y_c = k i' \frac{d\vartheta}{dt} \int ds' \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \left(-y \frac{\partial x'}{\partial s'} + x \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right], \\ Z_c = k i' \frac{d\vartheta}{dt} \int ds' \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \left(-y \frac{\partial x'}{\partial s'} + x \frac{\partial y'}{\partial s'} \right) \right]. \end{cases}$$

Diese drei Grössen sind aber genaue partielle Differentialquotienten nach x , y und z von der Grösse $-U_c$, wenn:

$$(4) \quad U_c = -ki' \frac{d\vartheta}{dt} \int \frac{x \frac{\partial y'}{\partial s'} - y \frac{\partial x'}{\partial s'}}{r} ds'.$$

U_c ist also die Kräftefunction von X_c , Y_c , Z_c , und alle drei lassen sich durch Herstellung der einzigen Function U_c ausdrücken. Dieses U_c muss nun ausgerechnet werden. Wir setzen abkürzend:

$$P = \int \frac{x \frac{\partial y'}{\partial s'} - y \frac{\partial x'}{\partial s'}}{r} ds'.$$

Darin ist $ds' = a d\varphi$ und $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

Setzen wir $\varrho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, so wird:

$$\begin{aligned} r^2 = \varrho^2 - 2a(x-\xi)(-\cos\vartheta \sin\psi \cos\varphi + \sin\vartheta \sin\chi \cos\psi \cos\varphi \\ + \sin\vartheta \cos\chi \sin\varphi), \\ - 2a(y-\eta)(-\sin\vartheta \sin\psi \cos\varphi - \cos\vartheta \sin\chi \cos\psi \cos\varphi \\ - \cos\vartheta \cos\chi \sin\varphi), \\ - 2a(z-\zeta)(\cos\chi \cos\psi \cos\varphi - \sin\chi \sin\varphi), \\ + a^2 g, \end{aligned} \quad (5)$$

wo g eine Grösse bezeichnet, deren Ausrechnung unterbleiben kann. Aus dieser Formel lässt sich gleich $1/r$ in Form einer Reihe herstellen, die wir wegen der Kleinheit von a mit dem zweiten Gliede abbrechen. Sie lautet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho} + \frac{a(x-\xi)}{\varrho^3} (-\cos\vartheta \sin\psi \cos\varphi + \sin\vartheta \sin\chi \cos\psi \cos\varphi \\ + \sin\vartheta \cos\chi \sin\varphi), \\ + \frac{a(y-\eta)}{\varrho^3} (-\sin\vartheta \sin\psi \cos\varphi - \cos\vartheta \sin\chi \cos\psi \cos\varphi \\ - \cos\vartheta \cos\chi \sin\varphi), \\ + \frac{a(z-\zeta)}{\varrho^3} (\cos\chi \cos\psi \cos\varphi - \sin\chi \sin\varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Multipliziert man dies mit:

$$ad\varphi \{ x(\sin\vartheta \sin\psi \sin\varphi + \cos\vartheta \sin\chi \cos\psi \sin\varphi - \cos\vartheta \cos\chi \cos\varphi) \\ - y(\cos\vartheta \sin\psi \sin\varphi - \cos\vartheta \sin\chi \cos\psi \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\chi \cos\varphi) \},$$

was der Ausdruck für $(x(\partial y' / \partial s') - y(\partial x' / \partial s')) ds'$ ist, so hat man den Integranden von P in integrierbarer Gestalt. Die Multiplication wird in der Ausführung sehr vereinfacht dadurch,

dass man
die cos
Integra
gesetzt
die gle

$-\frac{z}{\varrho^3}$
M
U_c der
netisch
man d
tarstro

(5)

H
 $\mu \sin \chi$
 $x = b$

(6)

D
können
wir A,
fällt da
ben nu
können
erhalte

(7)

Ann.

dass man 1) nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen braucht, die $\cos^2 \varphi$ und $\sin^2 \varphi$ enthalten, weil alle anderen bei der Integration über $d\varphi$ verschwinden, 2) $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0$ gesetzt werden kann, da beide bei der Integration über $d\varphi$ die gleiche Grösse π ergeben. Damit findet sich:

$$P = \pi a^2 \left\{ \frac{x - \xi}{\varrho^3} x \cos \chi \sin \psi + \frac{y - \eta}{\varrho^3} y \cos \chi \sin \psi \right. \\ \left. - \frac{z - \zeta}{\varrho^3} [(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) \cos \psi + (x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) \sin \chi \sin \psi] \right\}.$$

Multiplicirt man dies mit $-ki' (d\vartheta/dt)$, so hat man das \mathfrak{U}_c der Gl. (4). Dann aber kann man statt $\pi i' a^2$ das magnetische Moment μdK eines Elementes von K setzen, wenn man dK so gross wählt, dass es gerade den einen Elementarstrom s' enthält. Also wird dann:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{U}_c = & -k \frac{d\vartheta}{dt} \mu \left\{ \cos \chi \sin \psi \left(\frac{x - \xi}{\varrho^3} x + \frac{y - \eta}{\varrho^3} y \right) \right. \\ & - \cos \psi \frac{z - \zeta}{\varrho^3} (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) \\ & \left. - \sin \chi \sin \psi \frac{z - \zeta}{\varrho^3} (x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) \right\} \cdot dK. \end{aligned} \right.$$

Hierin ist nun $\mu \cos \chi \sin \psi = C$, $\mu \cos \psi = A$ und $\mu \sin \chi \sin \psi = -B$. Ferner setzen wir dK wieder $= p d\omega d\vartheta$, $x = b \cos \gamma$, $y = b \sin \gamma$. So findet sich:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{U}_c = & -k \frac{d\vartheta}{dt} p b d\omega \left\{ C \left(\frac{x - \xi}{\varrho^3} \cos \gamma + \frac{y - \eta}{\varrho^3} \sin \gamma \right) \right. \\ & \left. - A \frac{z - \zeta}{\varrho^3} \cos (\vartheta - \gamma) + B \frac{z - \zeta}{\varrho^3} \sin (\vartheta - \gamma) \right\} d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Den Eigenschaften des axocentrischen Magnets gemäss können wir dies über jeden Elementarring integrieren, indem wir A, B, C constant setzen. Integriert man aber über $d\vartheta$, so fällt das Glied, welches den Factor B hat, heraus, und es bleiben nur die Glieder mit A und C zu berücksichtigen. Diese können wir gleich über den ganzen Körper K integrieren; wir erhalten eine Grösse, die schlechthin mit U bezeichnet werde:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} U = & -k \frac{d\vartheta}{dt} b \int p d\omega \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \left[C \left(\frac{x - \xi}{\varrho^3} \cos \gamma + \frac{y - \eta}{\varrho^3} \sin \gamma \right) \right. \\ & \left. - A \frac{z - \zeta}{\varrho^3} \cos (\vartheta - \gamma) \right] d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Hierin sind dann ξ, η, ζ die Coordinaten des magnetischen Elementes dK und ρ sein Abstand von x, y, z . In dieser Form soll der Ausdruck vorläufig aufbewahrt bleiben.

Wir wenden uns nun zu Gl. (2):

$$(2) \quad X_w = ki' \int ds' \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} \right]$$

und stellen den Ausdruck:

$$Q = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \sum (x - x') \frac{\partial x'}{\partial t}$$

her. Die Ausführung der Differentiation ergibt zunächst:

$$Q = \frac{1}{r} \left[- \sum \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} + (x - x') \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right) + (y - y') \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right) \right].$$

Führt man hierin die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right) &= - \frac{d\vartheta}{dt} \frac{\partial y'}{\partial s'}, & \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right) &= \frac{d\vartheta}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'}, \\ \frac{\partial z'}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial x'}{\partial t} &= -y' \frac{d\vartheta}{dt}, & \frac{\partial y'}{\partial t} &= x' \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned}$$

ein, so kommt:

$$\begin{aligned} Q &= - \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dt} \left\{ \left(x' \frac{\partial y'}{\partial s'} - y' \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) + (x - x') \frac{\partial y'}{\partial s'} - (y - y') \frac{\partial x'}{\partial s'} \right\} \\ &= - \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial y'}{\partial s'} - y \frac{\partial x'}{\partial s'} \right), \quad \text{also:} \end{aligned}$$

$$X_w = -ki' \frac{d\vartheta}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{x \frac{\partial y'}{\partial s'} - y \frac{\partial x'}{\partial s'}}{r} ds',$$

d. i., wie man aus Gl. (4) sieht:

$$(8) \quad X_w = -X_c, \quad Y_w = -Y_c, \quad Z_w = -Z_c,$$

und die Integrale von X_w, Y_w, Z_w reduciren sich auf die Kräftefunction U_w , wenn:

$$(9) \quad U_w = -U,$$

und U aus Gl. (7) bestimmt ist.

§ 4. Grundgleichung der Induction nach dem Weber'schen Gesetz. — Zu untersuchen ist die Wirkung des rotirenden axocentrischen Magnets K auf einen ruhenden Draht s . Nach dem Weber'schen Gesetz in der von Clausius¹⁾ gegebenen Umformung übt das Stromelement ds' ,

1) Clausius, l. c. Gl. (8) p. 618.

welches einem geschlossenen Strome angehört, auf einen Punkt e von der Quantität Eins die Wirkung:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} X_w &= k i' ds' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \sum \frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s'} \left[(x - x') \frac{\partial x'}{\partial t} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist aus Gründen, die ich in meiner oben citirten Abhandlung auseinandergesetzt habe, die Annahme gemacht, die absoluten Werthe c' und c_1' der Strömungsgeschwindigkeiten beider Electricitäten in s' seien gleich.

Nun sei ds' das Element eines Elementarstromes im rotirenden K , e in Ruhe. Dann ist zunächst $(dx/dt) = (dy/dt) = (dz/dt) = 0$, also fällt das erste Glied von (10) fort. Ferner ist $\partial/\partial t$ bloß auf die Bewegung von K zu beziehen, also $(\partial/\partial t) \left((1/r) (\partial x'/\partial s') \right)$ der Differentialcoefficient nach t von einer Grösse, die nach jedem Umlauf von K zu ihrem ursprünglichen Werthe zurückkehrt; folglich ist der mittlere Werth von $(\partial/\partial t) \left((1/r) (\partial x'/\partial s') \right)$ gleich Null, und das zweite Glied verschwindet gleichfalls aus der Rechnung. Es bleibt also nur das dritte zu berücksichtigen. Das ist in § 3 bereits integrirt; die stationäre Wirkung des ganzen K auf e wird ausgedrückt durch:

$$(11) \quad X_w = - \frac{\partial U_w}{\partial x} = + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y_w = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z_w = \frac{\partial U}{\partial z},$$

und U ist durch Gl. (7) gegeben. Ein an der Stelle von e gelegenes Drahtelement ds unterliegt also in seiner Richtung der electromotorischen Beschleunigung:

$$\frac{\partial U}{\partial s},$$

und zwischen den beiden Enden eines Drahtes besteht, wenn das erste s_1 , das zweite s_2 heisst, die electromotorische Differenz:

$$(12) \quad E = U_2 - U_1.$$

s_2 ist positiv gegen s_1 , wenn $U_2 > U_1$, d. h. in diesem Falle: die positive Electricität in s wird nach s_2 hingetrieben, wenn $U_2 > U_1$. Legt man also den Draht s mit beiden Enden an

den rotirenden Körper K an, so fließt der Strom in diesem K von s_2 nach s_1 hin, wenn $U_2 > U_1$, im Draht s aber von s_1 nach s_2 .

Mit dem Vorstehenden ist die Grundgleichung und zugleich die Grundvorstellung der Induction nach Weber gewonnen: K wirkt nicht auf sich selbst; die ganze Quelle des Inductionsstromes liegt in der directen Einwirkung der magnetischen Theile von K auf die ruhenden Theile von s . Dabei ist es ganz gleichgültig, ob K ausser den magnetischen Theilen auch noch beliebige, an der Rotation theilnehmende, nicht magnetische Theile enthält: es besteht kein principieller Unterschied zwischen den Plücker'schen Versuchen und dem Faraday'schen Versuche der gewöhnlichen „unipolaren“ Induction durch einen nackten Magnet.

§ 5. Grundgleichung nach Clausius. ds' sei wieder ein Element eines Elementarstroms, der dem Körper K angehört, ε sei eine Electricitätseinheit, die gleichfalls in K enthalten ist, also an der Rotation von K theilnimmt. Nach dem Clausius'schen Gesetz wirkt ds' auf ε mit der Kraft

$$(13) \quad \mathfrak{K}_c = ki' ds' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \sum \frac{dx \partial x'}{\partial t \partial s'} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right\}.$$

Wenn ε sich mit K dreht, so ist $\partial r / \partial t = 0$, also reducirt sich (13) auf:

$$(14) \quad \mathfrak{K}_c = ki' ds' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \sum \frac{dx \partial x'}{\partial t \partial s'} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right\}.$$

Die Integration dieser Gleichung ist in § 3 ausgeführt und reducirt sich auf den Satz: „die Kräftefunction von K auf ε ist U aus Gl. (7).“

Im Innern von K herrschen also die drei Beschleunigungen:

$$(15) \quad X = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = - \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Durch dieselben ist im Innern von K eine statische Spannung gegeben; der muss eine electricische Ladung von K das Gleichgewicht halten. Diese Ladung besitzt eine Potentialfunction V , und die Gleichgewichtsbedingung besteht darin, dass für das ganze Volumen von K :

$$(16) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

sein muss. Aus (16) folgt:

$$(17) \quad V = -U + F,$$

wo F eine Constante, und:

$$(18) \quad \Delta^2 V = -\Delta^2 U.$$

Ferner, ist S irgend eine Fläche in K , und errichtet man in einem Punkt derselben zwei Normalen N und $-N$ von entgegengesetzter Richtung, so ist:

$$(19) \quad \frac{\partial V}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial (-N)} = -\left(\frac{\partial U}{\partial N} + \frac{\partial U}{\partial (-N)}\right).$$

Wir legen nun zu grösserer Bequemlichkeit im Augenblick t die Axe der x durch den Punkt ε , sodass γ zu Null wird. Dann lässt (7) sich schreiben:

$$U = -k \frac{d\vartheta}{dt} b \int \left(C \frac{x-\xi}{\varrho^3} - A \frac{z-\zeta}{\varrho^3} \cos \vartheta \right) dK.$$

Um ε als Mittelpunkt legen wir eine kleine Kugel vom Radius g und bilden U_g , den Betrag von U für den Inhalt dieser kleinen Kugel. Der Pol derselben falle in die Axe der x und sei der Axe der z abgewandt, ein Element der Kugel hat von ε den Abstand ϱ ; ϱ mache mit der Axe der x den Winkel α und die durch ϱ und die x -Axe gelegte Ebene mache mit der xy -Ebene den Winkel β . Dann ist zu setzen:

$$\xi - x = \varrho \cos \alpha, \quad \zeta - z = \varrho \sin \alpha \sin \beta,$$

$$dK = \varrho^2 \sin \alpha d\alpha d\beta d\varrho. \quad \text{Damit wird:}$$

$$U_g = k \frac{d\vartheta}{dt} b \iiint (C \cos \alpha - A \sin \alpha \sin \beta \cos \vartheta) \sin \alpha d\alpha d\beta d\varrho,$$

Dieser Ausdruck wird bei endlichem C und A augenscheinlich nicht unendlich, sondern um so kleiner, je kleiner man den Radius g der Hilfskugel wählt. Daraus folgt nach bekannten Betrachtungen der Anziehungstheorie:

a) U ist überall endlich und stetig:

b) $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ sind überall endlich:

c) $\Delta^2 U$ ist endlich, wenn μ stetig ist; aber es wird unendlich in Unstetigkeitsflächen von C oder A .

d) Ist C und A innerhalb der Hülfskugel constant, so lässt sich ausserdem die Integration von U_g ausführen und gibt:

$$U_g = 0.$$

Insbesondere gilt dies für $C = A = 0$, also für alle Theile von K , die nicht magnetisch sind.

Hiermit ergeben sich nun auf Grund der Gleichungen (16) bis (19) folgende Schlüsse für die „kinetische“ Ladung von K , welche die Potentialfunction V hervorruft:

Sie besteht erstens aus einem accessorischen Theil, der das F der Gl. (17) erzeugt. Derselbe ist, weil F constant, auf der äusseren Oberfläche von K vertheilt, und zwar in der Gleichgewichtslage. Er kann experimentell willkürlich vermehrt und vermindert werden, indem wir z. B. K isoliren und Funken aufschlagen lassen. Mit dem inneren Gleichgewicht von K hat F nichts zu schaffen, weil es zu $\partial V / \partial x$ etc. im Innern von K keinen Beitrag liefert. Also kann die accessorische Ladung auch nicht aus dem Bedürfniss des inneren Gleichgewichts allein entstehen: ist K isolirt, so ist $F = 0$, und F tritt erst auf, wenn K sich mit äusseren Körpern ins Gleichgewicht setzt, z. B. wenn K zur Erde abgeleitet wird. Wir bemerken gleich noch Folgendes: Legen wir dem K einen ruhenden Draht s an, so erhalten wir die Wirkung eines beliebigen F auf s auch dann, wenn wir uns allen Magnetismus aus K entfernt und seine Oberfläche künstlich zum Potentialniveau F geladen denken. Nun ist aber klar, dass ein solcher Körper K , der blos eine Gleichgewichtsladung gewöhnlicher Art hat, nie eine dauernde Induction in s hervorbringen kann. Also kann F das überhaupt nicht: die accessorische Ladung ist für unser Problem gleichgültig, und wir lassen F einfach bei Seite.

Dann bleibt die „wesentliche kinetische Ladung“ übrig. An allen Stellen, wo μ continuirlich ist, hat der Körper K im allgemeinen eine körperliche Ladung von der Dichtigkeit α , wo nach Gl. (18):

$$(20) \quad \alpha = + \frac{d^2 U}{4\pi}.$$

In Discontinuitätsflächen von μ hat diese Gleichung keine

Gültigkeit mehr; dort tritt eine Flächenladung auf, welche nach Gl. (19) die Flächendichtigkeit σ hat, wenn:

$$(21) \quad \sigma = + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial N} + \frac{\partial U}{\partial (-N)} \right).$$

Endlich ist, wie aus den vorstehenden Gleichungen folgt, für jede kleine Kugel vom Radius g in nicht magnetischen Theilen von K :

$$(22) \quad U_g = - V_g \quad \text{also:} \quad V_g = 0.$$

Das ist nur möglich, wenn jede Kugel, die ganz aus nicht magnetischem Material besteht, die Quantität Null von freier Electricität enthält, und das ist nur möglich, wenn alle nicht magnetischen Theile die Ladung Null haben. So erhalten wir auf einem kleinen Umweg sehr einfach das Resultat: „nicht magnetische Theile von K haben keine kinetische Ladung“; für sie ist $\Delta^2 U = 0$. Das gilt auch für die äusseren Grenzflächen, mit denen die nicht magnetischen Theile von K etwa an Luft grenzen. Denn wir können immer fingiren, dass der Raum, welcher K unmittelbar umgibt, mit Ausschluss der in ihm enthaltenen materiellen Theile, an der Rotation von K theilnehme; die Gleichung $\mu = 0$ setzt sich dann in diesen Raum fort, also auch die Gleichung $V_g = 0$. Bezüglich der Anwendung von Gl. (20) und (21) ist nun noch eine kleine Betrachtung erforderlich, die ich in meiner früheren, oben citirten Abhandlung, weil sie nebensächlich war, durch Vergoldung des Magnets K umgangen habe, die aber hier gemacht werden muss. Man darf nicht vergessen, dass Continuität oder Discontinuität der Materie, resp. der magnetischen Ladung, und Discontinuität der Bewegung Begriffe sind, die nur mit Vorbehalt auf physikalische Körper angewendet werden dürfen. Wir führen die Betrachtung an einem Stahlmagnet durch, der an Luft grenzt. Wenn wir die Masse des Stahls und ihren Magnetismus als continuirlich im Innern von K behandeln, so ist das eine mathematische Fiction; in Wirklichkeit besteht ja die Stahlmasse aus discontinuirlchen Moleculen, und der Magnetismus, resp. die Molecularstromthätigkeit, ist mit den ponderablen Moleculen so eng verknüpft, dass wir auch für μ

keine strenge Continuität annehmen können. Den Mittelwerth des wirklichen Zustandes, der im Innern des Stahlmagnets herrscht, ersetzen wir durch die Annahme continuirlicher Raumerfüllung; dem liegt die Annahme zu Grunde, dass ein kleiner Körpertheil dK , in dem ponderable Molecüle und Molecularströme sich irgendwie stationär bewegen, im Mittel gerade so wirkt, wie wenn dK continuirlich mit einer gewissen Masse mdK und einem gewissen magnetischen Moment μdK erfüllt wäre. Machen wir aber diese Annahme für das Innere von K , so müssen wir auch Entsprechendes für seine „Grenzfläche“ annehmen. Dieselbe ist dann eigentlich keine Grenzfläche, sondern eine Grenzschicht. In einer gewissen Tiefe dieser Grenzschicht sind nur Stahlmolecüle in derselben vorhanden, und zwar im Mittel so viele per Raumeinheit, wie das dem Begriff „Stahl“ entspricht. Weiter nach aussen enthält aber die Raumeinheit nicht mehr so viele Stahlmolecüle; diese Molecüle und die mit ihnen verbundenen Molecularströme lassen vielmehr zeitweilig bei ihren thermischen Bewegungen freie Räume offen; in diese können Luftmolecüle eindringen. Noch weiter nach aussen kommt eine Schicht, in welche die Stahlmolecüle bei ihren thermischen Bewegungen nur noch vereinzelt eindringen, während die Luftmolecüle dort schon die Mehrheit bilden. Zu äusserst endlich kommt der Luftraum, in den keine Stahlmolecüle mehr eindringen. Die Grenzschicht besteht also aus einer Reihe von Schichten, in denen der mittlere Stahlgehalt allmählich abnimmt. Die ganze Reihe dieser Schichten kann äusserst dünn sein; ihre Grösse hängt offenbar ab von den unbekannten Amplituden der thermischen Bewegungen, welche die Stahlmolecüle ausführen. Aber wenn die ganze Dicke der Grenzschicht auch nur kleine Bruchtheile von der Distanz zweier Stahlmolecüle beträgt, sie ist doch nicht in aller Strenge unendlich dünn, sondern endlich. Wollen wir also die Grenzschicht analog dem Innern des Magnets behandeln, so dürfen wir in ihr m und μ nicht eigentlich discontinuirlich setzen, sondern müssen beiden Grössen einen continuirlichen, wenn auch ausserordentlich raschen Abfall zuschreiben, der sich in der Grenz-

schicht
irgend
Dies
sogena
sind d
dunge
sehr
zweite
lung
B
eines
auch
innern
Magn
Schich
wir k
sogar
Leitu
unser
F
die r
liegen
ladun
schich
Luft,
welch
haut
welch
lich
tismu
stoffs
also
der
mit e
= 0.
z, y, z
Drah

schicht vollzieht. Mutatis mutandis gilt die Betrachtung für irgend welche Grenzen zwischen zwei beliebigen Körpern. Diese Grenzschichten sind offenbar die Stelle, wo wir die sogenannten Flächenladungen zu suchen haben. Im Grunde sind die sogenannten Flächenladungen nur körperliche Ladungen, die mit enormer Dichtigkeit auf einen Raum von sehr geringer Dicke zusammengedrängt sind. Es ist eine zweite Fiction, wenn wir sie, um die mathematische Behandlung bequemer zu machen, als Flächenladungen behandeln.

Bekanntlich ist zugleich in der nächsten Umgebung eines in Luft rotirenden Magnets die Luft, wahrscheinlich auch Feuchtigkeit etc., durch Adsorption verdichtet, und die innersten Schichten dieser Adsorptionshaut adhären dem Magnet so fest, dass sie mit ihm rotiren. Diese innerste Schicht, nebst der Grenzschicht, ist electricisch leitend; denn wir können einen galvanischen Strom hindurchschicken, der sogar bei ziemlich lockerer Berührung von K mit einem Leitungsdraht nicht allzugrossen Widerstand findet. Für unseren Zweck folgt nun daraus:

Besteht K aus magnetischen und unmagnetischen Theilen, die mit scheinbar scharfer Grenze aneinander stossen, so liegen die Ladungen, welche wir oben als kinetische Flächenladungen von der Dichtigkeit σ bezeichneten, in den Grenzschichten beider Theile. Ist K ein nackter Stahlmagnet in Luft, so liegen die gleichen Ladungen in der Grenzschicht, welche den Uebergang vom Stahl zur adsorbirten Adhäsionshaut macht. In beiden Fällen hat diejenige äusserste Schicht, welche die wahre Grenze der rotirenden Masse bildet, nämlich die adsorbirte Adhäsionshaut von K , keinen Magnetismus — vom Paramagnetismus des atmosphärischen Sauerstoffs kann man aus nahe liegenden Gründen absehen — also auch keine kinetische Ladung. Hieraus folgt nun: an der äussersten Grenze von K , die adhärende Luftschicht mit eingerechnet, ist V continuirlich, $\partial V / \partial N + \partial V / \partial (-N) = 0$. Dasselbe gilt für U . Also ist auch noch im Punkt x, y, z unmittelbar ausserhalb K , in den Enden eines angelegten Drahts, bis auf verschwindend kleine Grössen:

$$V = - U,$$

wenn bei der Herstellung von U der Radius b gleich $\sqrt{x^2 + y^2}$ gesetzt wird.

Wir wenden uns nun zu der Frage: Wie wirkt die Rotation von K auf ein ausserhalb ruhendes Drahtelement? Das Drahtelement sei ds und habe die Coordinaten x, y, z .

Nach dem Clausius'schen Gesetz wirkt das Element ds' eines Elementarstroms von K auf eine in xyz befindliche Electricitätseinheit direct mit der Kraft:

$$(23) \quad X = ki' ds' \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \sum \frac{dx \partial x'}{dt \partial s'} - \frac{\partial}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} \right) \right\}.$$

Für unseren Fall verschwindet das erste Glied dieses Ausdrucks, weil ds ruht, und das zweite, weil es ein genauer Differentialquotient nach t ist. Also: eine directe stationäre Einwirkung von K auf ds existirt überhaupt nicht.

Nun wirkt aber die wesentliche kinetische Ladung von K mit ihren electrostatischen Kräften auf ds — die electrodynamischen Kräfte derselben sind offenbar zu vernachlässigen, weil sie den Factor k^2 haben. Und zwar erzeugt V zwischen den beiden Enden von ds die electromotorische Differenz:

$$- \frac{\partial V}{\partial s} ds,$$

also zwischen den beiden Enden s_1 und s_2 eines beliebigen Drahtes die Differenz:

$$V_1 - V_2$$

in der Richtung s_1 nach s_2 hin. Liegen die Enden von s dem Körper K an, so ist $V = -U$, wie oben gezeigt, also:

$$(24) \quad E = U_2 - U_1$$

die Hauptgleichung für die electromotorische Kraft des in der Leitung entstehenden Stromes. Dieselbe ist identisch mit (12), also liefert das Clausius'sche Gesetz dieselbe Induction wie das Weber'sche. Dabei besteht aber zwischen beiden Theorien der schärfstmögliche Gegensatz in Betreff der aus ihnen resultirenden Anschauungen. Nach Weber lag die ganze Quelle der stationären Induction in der directen Einwirkung von K auf s ; nach Clausius ist diese directe Einwirkung gar nicht vorhanden, sondern die

ganze
ordnun
durch
ein, ka
weil d
die un
langen
viel ve
indirec
aber i

§
ich nu
beim C
das R

D
hängig
auf e
V der
setzen
heraus
die W
(25)

D
hält d
eine d
durch
hebt d
recten
N
Ladun
prakti
meiner
der P
die In

ganze Quelle der Induction liegt in der eigentümlichen Anordnung der wesentlichen kinetischen Ladung. Diese schlürft durch s_1 und s_2 verschiedene Quantitäten von Electricität ein, kann sich aber nicht mit ihnen ins Gleichgewicht setzen, weil die vom Magnetismus ausgehenden Kräfte immer wieder die ursprüngliche Anordnung der kinetischen Ladung verlangen. Die Rechnung nach dem Clausius'schen Gesetz ist viel verwickelter als die nach dem Weber'schen, weil sie indirect geführt werden muss, die resultirende Vorstellung aber im Grunde eben so einfach.

§ 6. Induction nach Riemann's Gesetz. Hier gebe ich nur kurz das Resultat an. Die Rechnung verläuft, wie beim Clausius'schen Gesetz. Von diesen unterscheidet sich das Riemann'sche durch ein Zusatzglied:

$$\mathfrak{E}_r = -ki' ds' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \sum \frac{\partial x' \partial x'}{\partial t \partial s'}.$$

Dieses Glied ist von der Bewegung von e oder ε unabhängig. Es tritt daher 1) in der directen Wirkung von K auf e oder ds auf, 2) in der Riemann'schen Kräftefunction V der kinetischen Ladung, und zwar mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie ad (1). Infolge dessen hebt es sich heraus, und die Riemann'sche Schlussgleichung lautet, wie die Weber'sche und Clausius'sche:

$$(25) \quad E = U_2 - U_1.$$

Die resultirende Vorstellung vom Hergang der Induction hält die Mitte zwischen den beiden früheren. Es existirt eine directe Einwirkung von K auf ds , und eine indirecte durch kinetische Ladung von K . Letztere überwiegt; sie hebt die directe Wirkung auf, und es bleibt von der indirecten ein Rest übrig, der E hervorruft.

Noch ist zu bemerken, dass die wesentliche kinetische Ladung nach Riemann nicht gleich Null ist. Welcher praktische Schluss daraus zu ziehen sei, das habe ich in meiner vorhin citirten Abhandlung schon gezeigt; hier hat der Punkt kein Interesse, weil der fragliche Umstand auf die Induction keinen Einfluss übt.

Der Leser wird längst bemerkt haben, dass die Vorstellungen, zu denen die drei Grundgesetze führen, bereits in früheren Theorien der Induction durch rotirende Magnete aufgetreten sind, aber als mehr oder weniger willkürliche Annahmen. Erst durch Anwendung der Grundgesetze wird der Gegensatz zwischen ihnen scharf hingestellt und auf den Gegensatz bestimmter Grundannahmen reducirt; leider wird zugleich bewiesen, dass die ganz verschiedenen Grundvorstellungen ganz identische experimentelle Resultate liefern, dass also eine Verification auf dem Gebiet der Induction selbst nicht möglich ist.

§ 7. Gemeinschaftliche Folgerungen aus allen drei Grundgesetzen. Wir sind nach allen drei Grundgesetzen zu den Hauptgleichungen:

$$(12) \quad E = U_2 - U_1.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= -k \frac{d\vartheta}{dt} b \int p d\omega \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \left[C \left(\frac{x-\xi}{\varrho^3} \cos \gamma + \frac{y-\eta}{\varrho^3} \sin \gamma \right) \right. \\ &\quad \left. - A \frac{z-\zeta}{\varrho^3} \cos (\vartheta - \gamma) \right] d\vartheta \end{aligned} \right.$$

gelangt. Die zweite von diesen legt es unmittelbar nahe, U in zwei Theile zu spalten, von denen der eine bloß vom axialen, der andere bloß vom radialen Magnetismus von K abhängt. Wir setzen:

$$(26) \quad U = U_z + U_p.$$

$$(27) \quad U_z = -k \frac{d\vartheta}{dt} b \int p \bar{C} \left(\frac{x-\xi}{\varrho^3} \cos \gamma + \frac{y-\eta}{\varrho^3} \sin \gamma \right) d\omega d\vartheta.$$

$$(28) \quad U_p = k \frac{d\vartheta}{dt} b \int p \bar{A} \frac{z-\zeta}{\varrho^3} \cos (\vartheta - \gamma) d\omega d\vartheta.$$

Beide Integrale sind über den ganzen Inhalt des von K bestrichenen Raumes zu erstrecken, und in beiden sind \bar{C} und \bar{A} die axocentrischen Mittelwerthe der axialen und der radialen Magnetisirung, bei denen wir jetzt zu grösserer Deutlichkeit wieder die übergesetzten Striche schreiben. U_z lässt sich sehr einfach auf eine bekannte Function von \bar{C} reduciren. Wir bilden das Vectorpotential der axialen Componente des Magnetismus von K , also das Integral des Vec-

torpotentials von $\bar{C}dK$. Heisst das Vectorpotential W_z , und sind F, G, H seine drei Componenten, so ist nach Maxwell¹⁾:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} F &= \iiint -\bar{C} \frac{\partial}{\partial \eta} d\xi d\eta d\zeta, & G &= \iiint \bar{C} \frac{\partial}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta, \\ H &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dazu haben wir die identische Gleichung:

$$(30) \quad W_z = F \cos(W_z, x) + G \cos(W_z, y).$$

Nun ist klar, dass das Vectorpotential irgend eines Elementarringes wegen der Constanz von \bar{C} senkrecht auf der Ebene stehen muss, die durch x, y, z und die Axe des Elementarringes, also die z -Axe geht. Da das für alle Elementarringe gilt, so gilt es auch für das Integral W_z . W_z steht also senkrecht auf b und liegt parallel der xy -Ebene. Zugleich ist es für positives C in Bezug auf die z -Axe rechtshändig. Daraus folgt:

$$\cos(W_z, x) = -\sin \gamma, \quad \cos(W_z, y) = \cos \gamma.$$

Also:

$$(31) \quad W_z = \iiint \bar{C} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \cos \gamma + \frac{\partial}{\partial \eta} \sin \gamma \right) dK.$$

Dies Integral ist aber identisch mit dem Integral in Gl. (27) also:

$$(33) \quad U_z = -k \frac{d\vartheta}{dt} b W_z.$$

U_z liefert die bekannten Erscheinungen, welche unter dem Namen unipolare Induction, Plücker'sche Versuche etc., umlaufen. Sie haben alle das miteinander gemein, dass sie von der axialen Magnetisirung von K abhängen. Wenn U_p nicht existirte, so könnte man ruhig den Namen „unipolare Induction“ für alle weiter brauchen, freilich in erweitertem Sinn, und nicht in der speciellen Bedeutung, die W. Weber ursprünglich mit der Benennung verband. Angesichts der Form von (7) drängt sich aber die Eintheilung der Inductionen in solche, die von \bar{C} , und solche, die von \bar{A} abhängen, geradezu auf, und demgemäss auch die Benennung: den Inductionen, die von U_z abhängen, lege ich den Namen „axiale

1) Maxwell, Treatise 2. p. 28. 1873.

Induction“ bei; derselbe ist bekanntlich von Matteucci schon in engerem Sinne gebraucht worden.

Ihnen gegenüber heissen die Inductionen, welche aus U_p hervorgehen, „radiale“. Dieselben bilden eine neue, bisher nicht beobachtete Classe von Erscheinungen, die wir jetzt etwas näher ansehen wollen. Aus Formel (28) folgt:

1) U_p hängt nur von \bar{A} ab und hat im allgemeinen einen endlichen Werth, wenn \bar{A} von Null verschieden ist. Um U_p rein und in möglichster Stärke darzustellen, hat man die Theile eines Magnets so anzuordnen, dass sie sämmtlich ihre Südpole oder sämmtlich ihre Nordpole der Drehungsaxe zukehren. (Lässt man einen gewöhnlichen Stabmagnet, dessen Nord- und Südhälfte gleich stark sind, und dessen geometrischer Aequator zugleich Medianebene der Magnetisirung ist, um einen Durchmesser seines Aequators rotiren, so ist A im Mittel $= 0$, also keine radiale Induction wahrnehmbar.)

2) U_p ist Null in der z -Axe, wegen $b = 0$.

3) Diejenigen Theilchen dK , für welche $z - \zeta$ positiv ist, liefern bei positivem \bar{A} positive Beiträge zu U_p , diejenigen, welche negatives $z - \zeta$ besitzen, liefern bei positivem A negative Beiträge. Nehmen wir also an, dass, wie es praktisch in der Regel der Fall sein wird, für einen gegebenen Körper K , \bar{A} durchweg positiv oder durchweg negativ sei, so gibt es eine Fläche, in welcher die entgegengesetzten Beiträge der verschiedenen dK einander gerade aufheben, sodass dort $U_p = 0$ ist. (Ist K ein regelmässig magnetisirter Rotationskörper, dessen Aequatorebene zugleich Symmetrieebene der radialen Magnetisirung ist, so fällt die Fläche $U_p = 0$ mit der Aequatorebene von K zusammen.) Diese Fläche soll „der Aequator des radialen Magnetismus“ abgekürzt „der Aequator“ heissen.

Aus (2) und (3) folgt: Legt man von den beiden Enden eines ruhenden Drahtes s das eine in die z -Axe, das andere im Aequator an K , so entsteht in dem Draht kein Strom. Das dürfte ein Grund sein, weshalb die Existenz der radialen Induction bis jetzt nicht zufällig gefunden wurde.

4) U_p ist Null im Aequator, in der Axe und im Unendlichen. Geht man vom Aequator in der $\pm z$ -Richtung aus, so ist U_p zunächst auf der einen Seite des Aequators positiv und wachsend, auf der anderen negativ und algebraisch abnehmend. Der absolute Werth von U_p wächst anfangs, wenn man sich vom Aequator entfernt, dann nimmt er wieder ab. Er besitzt also eine Maximumfläche, welche nothwendig eine Rotationsfläche, also bestimmt ist durch einen ihrer Meridianschnitte; der Schnitt mit der xz -Ebene hat die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial U_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_p}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Da diese Gleichung nur gelöst werden kann, wenn \bar{A} überall bekannt ist, lässt sich über die Form der Maximumfläche nichts allgemeines aussagen. Demgemäss kann man auch für den Strom, der in einem irgendwie an K angelegten Draht entsteht, keine allgemein gültige einfache Vorzeichenregel aufstellen. Wohl aber ist das thunlich, wenn man ein für allemal das eine Ende des Drahtes, etwa s_1 in die z -Axe oder in den Aequator verlegt. Das andere Ende, s_2 , kann man dann an einer beliebigen Stelle s_2 des Raumes anbringen, wenn man diese Stelle durch eine an der Rotationsaxe befestigte Metallscheibe mit der Axe in leitende und zugleich rotirende Verbindung setzt. Dann lautet das Vorzeichen-gesetz: „Der inducirte Strom fliesst im Draht s von s_1 nach s_2 hin, wenn s_2 auf der positiven Seite des Aequators liegt, und wenn der Nordmagnetismus in K nach aussen gerichtet ist,“ oder kürzer: „In der rotatorisch positiven Metallscheibe fliesst der Strom antiparallel den Magneten“. Der Strom kehrt sich um: 1) wenn s_2 den Aequator überschreitet, 2) wenn die Rotationsrichtung, 3) wenn \bar{A} umgekehrt wird.

Durch diese Eigenschaften ist die radiale Induction so deutlich gekennzeichnet, dass jede Verwechslung mit der axialen unmöglich wird.

§ 8. Das Experiment. Aus dem Vorstehenden erwächst zunächst die Aufgabe, die Existenz oder Nichtexistenz der radialen Induction experimentell nachzuweisen. Zu dem

Zweck habe ich folgenden Apparat herstellen lassen: Auf einer drehbaren Axe pq Fig. 22 (Aufriss, die Messingtheile schraffirt) sitzen ausser einer Triebwelle für den Schnurlauf drei Messingscheiben, zwei äussere L_1 und L_2 , eine mittlere L_3 . Die beiden äusseren sind einfache kreisförmige Messingplatten mit glattem Rand, dem zwei, in der Figur nicht gezeichnete, Contactfedern c_1 und c_2 anliegen; beide Scheiben haben je 6 cm Radius. Die mittlere Scheibe ist etwas dicker, hat nur 3 cm Radius und trägt auf ihrem Rande 24 gegen die Axe gerichtete Schraubenlöcher. In diese sind 24 kleine Magnete $M_1 M$ radial eingeschraubt, sodass die mittlere Scheibe mit den Magneten einen sternförmigen Körper bildet, dessen 24 Strahlen die 24 Magnete sind. Jeder Magnet M hat 3 cm Länge, 0,45 cm Radius, Cylindergestalt mit einer sehr leichten Abschrägung am inneren Ende. Alle sind so magnetisirt, dass ihre Nordpole nach aussen gerichtet sind, während die Südpole sich der Axe zukehren. Der hiesige Mechaniker Eberhardt hat den Apparat im übrigen befriedigend ausgeführt, nur ist unglücklicher Weise der Stoff, den man uns unter dem Namen Stahl verkauft hat, so schlecht, dass seine Coërcitivkraft auch nach sorgfältiger Härtung nur einen sehr geringen Werth aufweist. Der einzelne Magnet M hat im Durchschnitt nur 44 C.-G.-S.-Einheiten des Moments. Da ich in Constantinopel keineswegs darauf rechnen kann, binnen weniger Wochen etwas besseres zu finden, so habe ich einstweilen mit den schwachen Magneten gearbeitet; die Beobachtung geschah mittelst eines dickdrähtigen Ruhmkorff'schen Galvanometers mit astatischem Nadelpaar und ohne Spiegelablesung. Es wurde constatirt, dass ein Scalentheil desselben in der Nähe des Nullpunktes sehr nahe die Stromstärke $1/184000$ Daniell/Siemens, d. i. 0,00000063 C.-G.-S.-Einheiten repräsentirt.

Die Drehung des Apparates besorgte ein Gehülfe; eine kleine Zunge von steifem Papier wurde so am Apparat angebracht, dass die Köpfe sämmtlicher Magnete beim Drehen gegen sie anschlugen, und dem Gehülfen wurde die Aufgabe gestellt, den dadurch erzeugten Ton constant zu halten, was in der Regel sehr gut gelang. Der Sinn der Drehung wird

unten
herum
V
führen
zunäch
dere a
und L
notirt.
„rechts
weil d
der D
Reibun
chen '
schläg
weise
schnel
herum
tungen

1) an
2) auf
3) am
4) am
5) auf

D
rung
mit da
H
federn
2, am
6)

B
Ordnu

wie es
E
Ann.

unten mit willkürlicher Wahl des Vorzeichens als „rechts herum“ und „links herum“ bezeichnet.

Von den beiden Kupferdrähten, die zum Galvanometer führen, wurde nun der eine, dessen Ende s_1 heissen mag, zunächst fest an die Axe des Apparats gelegt, der andere an einer willkürlich gewählten Stelle der Scheiben L_1 und L_2 angebracht und der Ausschlag des Galvanometers notirt. Jedesmal wurde zuerst ein Satz von Beobachtungen „rechts herum“, dann ein zweiter „links herum“ genommen, weil dabei wenigstens für den einzelnen Satz die Constanz der Drehungsgeschwindigkeit verbürgt werden konnte. Die Reibung der Kupferdrähte am Messing lieferte einen schwachen Thermostrom, der sich durch Asymmetrie der Ausschläge kundgibt; diese Asymmetrie mag aber auch theilweise daran liegen, dass es dem Gehülften leichter wurde, schnell und regelmässig rechts herum zu drehen, als links herum. Einen willkürlich ausgewählten Satz von Beobachtungen gibt folgende Tabelle.

s_2 liegt	Ausschlag bei Drehung		Differenz
	rechts herum	links herum	
1) an der Axe	-2	-2	0
2) auf der Mitte der Radien von L_1	-2	- $\frac{1}{2}$	-1,5
3) am Rande von L_1	-4	+2	-6
4) am Rande von L_2	+3	-6	+9
5) auf der Mitte der Radien von L_2	- $\frac{1}{2}$	-3	+2,5

Die Abhängigkeit der Induction von b und die Umkehrung derselben beim Ueberschreiten des Aequators ist hiermit dargethan.

Hierauf wurden die Galvanometerdrähte an den Contactfedern c_1 und c_2 befestigt, sodass also s_1 am Rande von L_1 , s_2 am Rande von L_2 anliegt; die Ausschläge waren:

$$6) \quad +10 \quad -5 \quad \text{Diff. 15}$$

Bezeichnet man die Ausschlagsdifferenzen durch ihre Ordnungsnummern, so ist hiernach;

$$(6) = (4) - (3),$$

wie es der Existenz einer Kräftefunction U entspricht.

Eine besondere Verification der Vorzeichen ergab den

Satz: „der Strom des Versuchs (6) fließt durch das Galvanometer von der rotatorisch negativen Scheibe zur positiven“; derselbe entspricht der Theorie.

Ich habe nun auch noch einen quantitativen Vergleich zwischen Theorie und Experiment versucht. Bei dem Genauigkeitsgrad, den meine Versuche erreichen, lässt sich der Ausdruck U_p für den Rand einer Scheibe L_1 unter der vereinfachenden Voraussetzung berechnen, dass der gesammte Radialmagnetismus A der 24 Magnete in einem Ring von unendlich kleinem Querschnitt enthalten sei, der durch die Mittelpunkte aller Magnete geht. Dieser Kreis hat dann den Radius $\frac{3}{4}b$, wenn $b = 6$ cm. In magnetischem Maass, wo $k = 1$, ist dann:

$$U_p = \frac{3}{4} \frac{d\vartheta}{dt} b^2 \overline{A} d\omega \cdot (z - \zeta) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\vartheta - \gamma)}{\varrho^3} d\vartheta$$

$$\text{und:} \quad 2\pi \cdot \frac{3}{4} b \cdot A d\omega = 24 M = 24 \cdot 44,$$

$$\text{also:} \quad U_p = \frac{24 \cdot 44}{2\pi} \frac{d\vartheta}{dt} b (z - \zeta) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\vartheta - \gamma)}{\varrho^3} d\vartheta.$$

Hierin ist bei meinem Apparat $z - \zeta = 2,75 = 0,46b$:

$$\varrho = \sqrt{b^2 + (\frac{3}{4}b)^2 + (z - \zeta)^2 - \frac{3}{2}b^2 \cos(\vartheta - \gamma)}.$$

Setzt man $\vartheta - \gamma = \pi - 2\beta$, so wird:

$$\frac{1}{\varrho^3} = \frac{1}{\sqrt{3,27^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \beta}}, \quad \text{für } x = 0,96.$$

Also:

$$U_p = \frac{22 \cdot 44}{2\pi} \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,46 \frac{1}{\sqrt{3,27^2}} \cdot 4 \int_0^\pi \frac{1 - 2 \cos^2 \beta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \beta}} d\beta.$$

Das Integral ist, wenn K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art bedeuten:

$$\frac{1}{1 - x^2} E - 2 \frac{K - E}{x^2}.$$

Für $x = 0,96$ ist $E = 1,09$ und $K = 2,69$, also:

$$\int_0^\pi \frac{1 - 2 \cos^2 \beta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \beta}} d\beta = 10,1 \quad \text{und damit:}$$

$$U_p = 88 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Wird demnach s_1 an den Rand von L_1 , s_2 an den von L_2 gelegt, so ist die electromotorische Kraft:

$$2 U_p = 176 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Der Widerstand der Galvanometerleitung wurde zu 0,49 Siemens bestimmt, d. h. $46 \cdot 10^7$ C.-G.-S.-Einheiten. Damit ergibt sich die Stromstärke J in Scalentheilen des Galvanometers zu:

$$J = 0,60 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Beim Versuch wurde wieder die oben erwähnte Papierzunge angewendet und der drehende Gehülfe angewiesen, den Ton derselben auf gleiche Höhe mit einer von Zeit zu Zeit angerissenen Violoncellsaite zu bringen. Die Drehungsgeschwindigkeit, welche dieser Tonhöhe entsprach, berechnete sich zu 6,4 Touren in der Sekunde, also war $d\vartheta/dt = 2\pi \cdot 6,4$, und damit der berechnete Ausschlag:

$$J = 24 \text{ Scalentheile.}$$

Die Beobachtung ergab bei Drehung:

$$\text{rechts herum} - 17 \quad \text{links herum} + 15,$$

im Mittel also 16 Scalentheile. Die Uebereinstimmung ist genügend, wenn man bedenkt, dass die Südenden sämtlicher Magnete dicht nebeneinander stehen, dass die Magnete also einander durch ihre gegenseitige Einwirkung wesentlich abschwächen, sodass sie im Apparat ein kleineres Moment besitzen, als sich bei der Bestimmung am einzelnen Magnet ergab.

Wer die Schwierigkeit des Arbeitens in einer Stadt ohne wissenschaftlich-technische Hilfsmittel kennt, der wird mich für entschuldigt halten, dass ich keine genauere Verification anstrebe, sondern mich damit begnüge, die Existenz der radialen Induction durch die vorstehenden Versuche sicher gestellt zu haben.

Aus der Existenz der Induction folgt nach den Lenz-Neumann'schen Principien unmittelbar die Existenz einer

entsprechenden electromagnetischen Rotation: Leitet man durch die beiden Contacte c_1 und c_2 einen Batteriestrom in den Apparat, so muss in ihm eine Kraft auftreten, welche ihn dreht, und zwar in dem Sinne, dass der eingeleitete Strom durch die Axe von der rotatorisch negativen zur positiven Seite geht, wenn die Nordpole der Magnete nach aussen gekehrt sind. Diese Erscheinung habe ich mit meinen schlechten Magneten natürlich nicht herstellen können.

Nachschrift. Als die vorstehende Arbeit bereits zum Druck eingeschickt war, erhielt ich das letzte Decemberheft dieser Annalen und lernte daraus Hrn. Hoppe's Abhandlung über unipolare Induction¹⁾ kennen. Hoppe stellt den Erfahrungssatz auf: „Mitrotirende Leitertheile haben keinen Antheil an der Induction, sondern fungiren eben nur als Leiter“; derselbe stimmt vollständig mit dem, was oben aus den drei Grundgesetzen abgeleitet wurde.

Ferner schliesst Hoppe aus seinen Electrometerversuchen, in oder auf einem rotirenden Magnet sei keine freie Electricität vorhanden. Wäre der Schluss streng richtig, so wäre damit gegen die Gesetze von Riemann und Clausius, für das Weber'sche Gesetz entschieden. Ich glaube aber nicht, dass das der Fall ist. Denn selbst wenn man annimmt, der gedrehte Magnet besitze keinerlei freie Ladung, so hätte doch beim Hoppe'schen Condensatorversuch ein Ausschlag des Electrometers erfolgen müssen; denn der Magnet erzeugt ja dann durch seine directe electrodynamische Einwirkung auf den Condensator in diesem eine electrostatische Spannung. Aus dem Condensatorversuch ist also vorläufig nur zu schliessen, dass das angewandte Electrometer nicht empfindlich genug war, um die sehr kleinen Kräfte, von denen hier die Rede ist, nachzuweisen. Dem entspricht vollständig, dass Hr. Hoppe auch dann keinen sicheren Unterschied zwischen Rechts- und Linksdrehung gefunden hat, wenn er den Electrometerdraht direct auf dem rotirenden Magnet schleifen liess; der einseitige Ausschlag,

1) Hoppe, Wied. Ann. 29. p. 544. 1886.

den
sich
gen
austü
Die
oder
sein,
d. J.
Geset
bestim
Magn
ein fe

XI.
Ring

§
theils
bunde
durch
stattfin
Ström
sie du
hervor
umkeh
unrich
ergebe
welche
Arbeit
ducirte
ten, gle

1) V
2) C
Ann. 20

den er unter diesen Umständen erzielte, beweist eben, was sich auch leicht direct berechnen lässt, dass die regelmässigen electrostatischen Kräfte, welche der gedrehte Magnet ausübt, klein sind gegen die unregelmässigen Reibungseffecte. Die Lösung der Frage, ob eine kinetische Ladung existirt oder nicht, wird indirect auf denjenigen Wegen zu suchen sein, die ich in meiner oben citirten Abhandlung vom Januar d. J. angegeben habe. Nur in Betreff des Riemann'schen Gesetzes könnte der Hoppe'sche Condensatorversuch einen bestimmten Schluss gestatten¹⁾; dazu müsste aber 1) der Magnet massiv, 2) der Magnet isolirt, 3) das Electrometer ein feines Instrument von geringer Capacität sein.

XI. Ueber die Berechnung der in der Masse des Ringes einer Dynamomaschine inducirten Ströme; von H. Lorberg.

§ 1. Die in der Ueberschrift erwähnten Ströme werden theils durch die Bewegung des mit den Windungen fest verbundenen Ringes gegen die festen Electromagnete, theils durch die in den Ringwindungen an den Indifferenzstellen stattfindenden Stromwechsel inducirt. Von den letzteren Strömen behauptet Clausius²⁾, dass sie dieselben seien, wie sie durch die ruhenden Windungen in dem gedrehten Ringe hervorgebracht werden würden, wenn in ihnen keine Stromumkehrungen stattfänden. Dieser Satz ist, soviel ich sehe, unrichtig. Clausius führt zu seiner Begründung nur an, er ergebe sich durch einen ganz analogen Schluss, wie der, durch welchen er vorher gefolgert hat, dass die ponderomotorische Arbeit A , welche die an dem in der Eisenmasse des Ringes inducirten Magnetismus wirkenden Kräfte bei der Drehung leisten, gleich derjenigen A_1 ist, welche der ruhende Ringmagnetis-

1) Vgl. Budde, Wied. Ann. 30. p. 184 ff. 1887.

2) Clausius, Zur Theorie der dynamoelectrischen Maschinen. Wied. Ann. 20. p. 379. 1883.

mus an den Windungen leistet. Dieser Schluss ist kurz folgender. Die Arbeit A rührt, da der Ring und die Windungen fest miteinander verbunden sind, nur von den zwischen den festen Electromagneten und dem Ringmagnetismus wirkenden Kräften her; ist nun A_2 die von den Windungen an dem bewegten Ringmagnetismus geleistete Arbeit, so ist $A + A_2 = 0$, weil das ganze von den festen Electromagneten und den Windungen auf den Ringmagnetismus ausgeübte Drehungsmoment $= 0$ ist; denn die Magnetisirung des Ringes als eines Rotationskörpers durch beide Kräfte wird eben durch die Bedingung bestimmt, dass jenes Drehungsmoment verschwindet, dass er also durch die magnetisirenden Kräfte nicht gedreht wird. (Dass dieser Satz nicht ganz so selbstverständlich ist, wie es auf den ersten Blick aussieht, zeigt der unten zu erwähnende analoge Schluss von Clausius; es möge daher ein kurzer mathematischer Beweis gestattet sein. Es seien X, Y, Z die Componenten der magnetisirenden Kraft, $\alpha = kX, \beta = kY, \gamma = kZ$ die dadurch erzeugten magnetischen Momente;

$$W = - \int (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) d\tau$$

die potentielle Energie des Magneten im Magnetfelde, also $-dW/d\vartheta$ das Drehungsmoment des Feldes auf den Magnet, welcher Ausdruck unter der Annahme zu bilden ist, dass der Magnet bei der Drehung seinen Magnetismus mitnimmt. Ist er also ein Rotationskörper, so kann man $dW/d\vartheta$ dadurch bilden, dass man in jeden Raumpunkt den dem Werth $\vartheta - d\vartheta$ entsprechenden magnetischen Zustand eintretend annimmt; es wird also:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\vartheta} &= \int \left(X \frac{d\alpha}{d\vartheta} + \dots \right) d\tau = k \int \left(X \frac{dX}{d\vartheta} + \dots \right) d\tau \\ &= \frac{k}{2} \int \frac{d}{d\vartheta} (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau, \end{aligned}$$

oder wenn wir $d\tau = \varrho d\varrho dz d\vartheta$ setzen:

$$\frac{dW}{d\vartheta} = \frac{k}{2} \iint \varrho d\varrho dz \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\vartheta} (X^2 + Y^2 + Z^2) d\vartheta = 0.$$

Somit ist $A = -A_2 = A_1$, was den oben erwähnten Clausius'schen Satz gibt.)

Was nun die im Ring durch die Stromwechsel inducirten Ströme S betrifft, so scheint der Schluss, welchen Clausius im Sinne hat, folgender zu sein. Es bezeichne D das Drehungsmoment der Ringwindungen auf diese Ströme, D_1 das Drehungsmoment der Ringwindungen auf diejenigen Ströme S_1 , welche durch die ruhenden und keine Stromwechsel enthaltenden Windungen in dem gedrehten Ringe inducirt werden würden. Denken wir uns statt dessen den Ring ruhend und die Windungen in demselben Sinne gedreht und Stromwechsel habend, so entsteht im Ringe einmal das Stromsystem S , zweitens das Stromsystem $-S_1$, das Drehungsmoment am Ringe ist also $D_2 = D - D_1$; da nun Clausius $S = S_1$, also auch $D = D_1$ setzt, so muss das von ihm angewandte Princip darauf hinauskommen, dass $D_2 = 0$ sei, d. h. dass der ruhende Ring durch die sich drehenden und stromwechselnden Windungen so inducirt werde, dass die erzeugten ponderomotorischen Kräfte ihn nicht in Drehung zu versetzen suchen. Dieser Satz ist aber bekanntlich falsch; die durch die Drehung der Windungen inducirten Ströme liefern ein Drehungsmoment, welches die Windungen rückwärts, den Ring also vorwärts zu drehen sucht, und dessen Arbeit gleich der negativen Arbeit der entsprechenden electromotorischen Kräfte ist; und dazu kommt das Drehungsmoment der durch die Stromwechsel inducirten Ströme, welches mit jenem in gar keiner nothwendigen Beziehung steht. Wenn allgemein durch Aenderungen, welche in irgend einem Theil eines Magnetfeldes vor sich gehen (Bewegung und Intensitätsänderung von Strömen oder Magneten) in einem Leiter Ströme inducirt werden, so wird er durch die ponderomotorischen Kräfte des Feldes auf diese Ströme bewegt, und auch, falls er ein Rotationskörper ist, um seine Axe gedreht; der Unterschied von dem beim Beweis des früheren Satzes angewandten Princip liegt darin, dass dort die inducirenden (magnetisirenden) Kräfte zugleich die ponderomotorischen waren, hier aber nicht. Um diesen Satz auch analog dem obigen Beweis mathematisch darzustellen, mögen u, v, w die Componenten von Strömen bezeichnen, welche in einem Leiter durch in irgend einem Theil des Magnetfeldes vor-

gehende Veränderungen inducirt werden; bezeichnen F_x, F_y, F_z die Componenten des Vectorpotentials des Feldes in einem Punkt (x, y, z) des Leiters, $\delta' F_x / dt$ etc. ihre Aenderungen, so ist die potentielle Energie des im Leiter fließenden Stromsystems bekanntlich:

$$W = \int (F_x u + \dots) d\tau,$$

wo das Integral über den ganzen Leiter zu erstrecken ist, und das Drehungsmoment der ponderomotorischen Kräfte des Feldes auf den Leiter um irgend eine Axe ist $= dW/d\vartheta$. Ist nun der Leiter ein Rotationskörper um diese Axe, so ergibt sich wie oben das Drehungsmoment:

$$D = \frac{dW}{d\vartheta} = - \int \left(F_x \frac{du}{d\vartheta} + \dots \right) d\tau.$$

Die Componenten der durch die Aenderung des Feldes inducirten electromotorischen Kraft sind $E_x = -\delta' F_x / dt$ etc.; bezeichnet also k die Leitungsfähigkeit, so ist:

$$u = -k \frac{\delta' F_x}{dt} \text{ etc.}$$

Dadurch wird das Drehungsmoment:

$$(a) \left\{ \begin{aligned} D &= k \int \left[F_x \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{\delta' F_x}{dt} \right) + \dots \right] d\tau \\ &= k \int \frac{d}{d\vartheta} \left(F_x \frac{\delta' F_x}{dt} + \dots \right) d\tau - k \int \left(\frac{dF_x}{d\vartheta} \frac{\delta' F_x}{dt} + \dots \right) d\tau \\ &= -k \int \left(\frac{dF_x}{d\vartheta} \frac{\delta' F_x}{dt} + \dots \right) d\tau, \end{aligned} \right.$$

da das erste Integral für einen Rotationskörper verschwindet. Dieser Ausdruck ist aber im allgemeinen nicht $= 0$. Nehmen wir z. B., entsprechend dem bei der Dynamomaschine stattfindenden, die Aenderung des Magnetfeldes darin bestehend an, dass ein im Azimuth ϑ_1 liegender linearer Kreisstrom i_1 vom Radius ϱ_1 sich um einen mit der Rotationsaxe (der z -Axe) zusammenfallenden Durchmesser mit der Winkelgeschwindigkeit v_1 dreht, so ist $F_x = i_1 F_{1x}$ etc., wo:

$$F_{1x} = \int \frac{1}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds',$$

und, wenn φ' den Winkel des Radius mit der xy -Ebene bezeichnet:

$$\frac{dx'}{ds'} = -\sin \varphi' \cos \vartheta_1, \quad \frac{dy'}{ds'} = -\sin \varphi' \sin \vartheta_1, \quad \frac{dz'}{ds'} = \cos \varphi'.$$

Setzen wir also:

$$A_1 = \varrho_1 \int \frac{1}{r} \sin \varphi' d\varphi', \quad B_1 = \varrho_1 \int \frac{1}{r} \cos \varphi' d\varphi',$$

so wird:

$$F_{1x} = -A_1 \cos \vartheta_1, \quad F_{1y} = -A_1 \sin \vartheta_1, \quad F_{1z} = B_1,$$

$$\frac{\delta' F_{1x}}{dt} = v_1 \frac{dF_{1x}}{d\vartheta_1} = v_1 \left(A_1 \sin \vartheta_1 + \frac{dA_1}{d\vartheta} \cos \vartheta_1 \right),$$

$$\frac{\delta' F_{1y}}{dt} = v_1 \left(-A_1 \cos \vartheta_1 + \frac{dA_1}{d\vartheta} \sin \vartheta_1 \right), \quad \frac{\delta' F_{1z}}{dt} = -v_1 \frac{dB_1}{d\vartheta},$$

also das Drehungsmoment nach Gl. (a):

$$(b) \quad D_{11} = k v_1 i_1^2 \int \left[\left(\frac{dA_1}{d\vartheta} \right)^2 + \left(\frac{dB_1}{d\vartheta} \right)^2 \right] d\tau,$$

was, entsprechend dem bekannten Satze, unter allen Umständen von 0 verschieden und positiv ist. Nehmen wir ferner die Veränderung des Magnetfeldes darin bestehend an, dass in einem beliebigen linearen Stromkreis die Stromstärke i_2 sich ändert, setzen also:

$$F_x = i_2 F_{2x} \text{ etc.}, \quad \frac{\delta' F_x}{dt} = \frac{di_2}{dt} F_{2x},$$

so ergibt sich aus (a) das Drehungsmoment in Bezug auf die hierdurch inducirten Ströme:

$$\begin{aligned} D_{22} &= -k i_2 \frac{di_2}{dt} \int \left(F_{2x} \frac{dF_{2x}}{d\vartheta} + \dots \right) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} k i_2 \frac{di_2}{dt} \int \frac{d}{d\vartheta} (F_{2x}^2 + F_{2y}^2 + F_{2z}^2) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Finden beide Veränderungen gleichzeitig statt, so wird $F_x = i_1 F_{1x} + i_2 F_{2x}$, also das ganze Drehungsmoment:

$$D = D_{11} + D_{12} + D_{21},$$

wo D_{11} der Werth (b) ist, während das Drehungsmoment des Stromes i_2 auf das erste Stromsystem im Leiter:

$$D_{12} = -k v_1 i_1 i_2 \int \left(\frac{dF_{2x}}{d\vartheta} \frac{dF_{1x}}{d\vartheta_1} + \dots \right) d\tau,$$

und das Drehungsmoment des Stromes i_1 auf das zweite Stromsystem im Leiter:

$$D_{21} = -k i_1 \frac{di_2}{dt} \int \left(F_{2x} \frac{dF_{1x}}{d\vartheta} + \dots \right) d\tau,$$

und durch willkürliche Bestimmung von i_2 und di_2/dt kann man D_{12} und D_{21} , also auch D jeden beliebigen Werth geben.

§ 2. Die Berechnung der im Ring der Dynamomaschine inducirten electromotorischen Kräfte nach beiden Annahmen wird den im Vorigen nachgewiesenen Unterschied bestätigen. Nehmen wir die Axe des Ringes zur z -Axe, legen die x -Axe durch die zwei Indifferenzquerschnitte und führen Polarcordinaten ϱ , ϑ , z ein, wobei wir den Winkel ϑ von der positiven x -Axe aus rechnen, und setzen die Componenten des Vectorpotentials einer im Querschnitt $\vartheta=0$, resp. $\vartheta=\pi$ liegenden Ringwindung:

$$(a) \quad F_x = \int \frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} ds', \quad F_y = \int \frac{1}{r} \frac{dy'}{ds'} ds' = 0, \quad F_z = \int \frac{1}{r} \frac{dz'}{ds'} ds',$$

so sind die Componenten der durch einen im Querschnitt $\vartheta=0$ stattfindenden Stromwechsel von $-i/2$ zu $+i/2$ in einem Punkt (x, y, z) des Ringes inducirten electromotorischen Kraft:

$$(1) \quad E_x = -iF_x, \quad E_y = 0, \quad E_z = -iF_z.$$

Bezeichnet dagegen V_1 das magnetische Potential der ganzen, in ihren zwei Hälften von entgegengesetzten Strömen $\mp i/2$ durchflossenen Ringwindung in einem Punkt $p \equiv (\varrho, \vartheta, z)$ des Ringes, v die Drehungsgeschwindigkeit des Ringes, sind also die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes p :

$$v_x = -v\varrho \sin \vartheta, \quad v_y = v\varrho \cos \vartheta, \quad v_z = 0,$$

so sind die Componenten der electromotorischen Kraft, welche durch die ruhenden Windungen in dem bewegten Punkt p inducirt werden würden:

$$(1^a) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x' = -\frac{dV_1}{dy} v_z + \frac{dV_1}{dz} v_y = v \frac{dV_1}{dz} \varrho \cos \vartheta, \\ E_y' = -\frac{dV_1}{dz} v_x + \frac{dV_1}{dx} v_z = v \frac{dV_1}{dz} \varrho \sin \vartheta, \\ E_z' = -\frac{dV_1}{dx} v_y + \frac{dV_1}{dy} v_x = -v\varrho \left(\frac{dV_1}{dx} \cos \vartheta \right. \\ \quad \left. + \frac{dV_1}{dy} \sin \vartheta \right) = -v\varrho \frac{dV_1}{d\varrho}. \end{array} \right.$$

Während also nach den (gemäss der hergebrachten Theorie der Induction unzweifelhaft richtigen) Gleichungen (1) die auf der Ringaxe senkrechte Componente der electromotorischen Kraft parallel der Indifferenzlinie ist, ist dieselbe nach den Gleichungen (1^a), welche nach Clausius dasselbe Resultat geben sollen, radial gerichtet.

Um die electromotorischen Kräfte nach den Gleichungen (1) zu berechnen, nehmen wir die Richtung der wachsenden ϑ als die Drehungsrichtung des Ringes und bezeichnen die Stromstärke im äusseren Stromkreis mit i , in der ersten Hälfte der Ringwindungen (von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$) mit $+i/2$, in der zweiten mit $-i/2$; der Strom möge bei $\vartheta = \pi$ in beide Windungshälften eintreten, bei $\vartheta = 0$ austreten, und die Wickelung sei derart, dass die Nordpolrichtung der Ringströme in der ersten Windungshälfte in die Richtung der wachsenden ϑ , in der zweiten also in die entgegengesetzte Richtung fällt. Indem beim Ueberschreiten des Querschnitts $\vartheta = 0$ der Strom einer Windung von $-i/2$ in $+i/2$ übergeht, entsteht nach Gl. (1) ein Integralwerth der electromotorischen Kraft:

$$E_x = -F_x^0 \int \frac{di}{dt} dt = -iF_x^0,$$

wo F_x^0 den Werth in Gl. (a) für die Windung $\vartheta = 0$ bezeichnet; ist also h die Tourenzahl, und nehmen wir zunächst nur eine einzige Lage von n Windungen an, so entsteht während der Zeit $1/2h$ einer halben Umdrehung ein Integralwerth der electromotorischen Kraft:

$$= -\frac{n}{2} iF_x^0,$$

also ist der Mittelwerth der electromotorischen Kraft während einer halben Umdrehung:

$$E_x^0 = -nhiF_x^0.$$

Indem im Querschnitt $\vartheta = \pi$ der in Beziehung auf die Coordinatenaxen entgegengesetzt gerichtete Strom von $+i/2$ zu $-i/2$, oder der in Beziehung auf die Coordinatenaxen gleich gerichtete Strom von $-i/2$ zu $+i/2$ übergeht, entsteht ebenso eine electromotorische Kraft:

$$E_x^\pi = -nhiF_x^\pi,$$

die ganze electromotorische Kraft ist also:

$$(2) \quad E_x = -nhi(F_x^0 + F_x^\pi) = -nhiF_x.$$

(Dass in Wirklichkeit mehrere, eine schmale Spule bildende Windungen gleichzeitig in die entgegengesetzte Windungshälfte übertreten, macht offenbar keinen Unterschied, wenn man mit n immer die ganze Anzahl der einzelnen Windungen bezeichnet.) Zur Berechnung von F_x^0 zerlegen wir die Stromfläche in Elemente $d\sigma$ und setzen für einen Elementarstrom $x' = x_0 + \xi$ etc., also:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{r_0} \xi + \dots \right),$$

folglich für diesen Elementarstrom:

$$\begin{aligned} F_x^0 &= \int \frac{dx'}{r} = \int \frac{d\xi}{r_0} - \frac{d}{dx} \frac{1}{r_0} \int \xi d\xi - \frac{d}{dy} \frac{1}{r_0} \int \eta d\xi - \frac{d}{dz} \frac{1}{r_0} \int \zeta d\xi \\ &= -\frac{d}{dy} \frac{1}{r} \int \eta d\xi + \frac{d}{dz} \frac{1}{r} \int \xi d\zeta. \end{aligned}$$

Bezeichnet aber v die Nordpolrichtung der Normale der Stromfläche, so ist $\int \eta d\xi = d\sigma \cos v z$, $\int \xi d\zeta = d\sigma \cos v y$, also der Werth von F_x^0 für die ganze Windung:

$$F_x^0 = \int \left(-\frac{d}{dy} \frac{1}{r} \cos v z + \frac{d}{dz} \frac{1}{r} \cos v y \right) d\sigma,$$

mithin im vorliegenden Falle, wo $\cos v y = +1$, $\cos v x = \cos v z = 0$ ist:

$$F_x^0 = \frac{d}{dz} \int \frac{d\sigma}{r}, \quad F_y^0 = 0, \quad F_z^0 = -\frac{d}{dx} \int \frac{d\sigma}{r}.$$

Setzen wir also:

$$(3) \quad P = \int \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_\pi} \right) d\sigma,$$

wo r_0, r_π die Entfernungen des Punktes p von einem Punkt der Stromfläche $\vartheta = 0$, resp. $\vartheta = \pi$ bezeichnen, so wird:

$$(3_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = -nhi \frac{dP}{dz}, \quad E_y = 0, \quad E_z = nhi \frac{dP}{dx}, \\ u = -nhki \frac{dP}{dz}, \quad v = 0, \quad w = nhki \frac{dP}{dx}, \end{array} \right.$$

wo $u, v,$
Substan
handen
man n

zu setz
Da
ruhte (
sind), s
veränd
electron
würden
in jede
Punkt

$p_\theta - d\theta$
diese e
Ring a
einer
annehm
ströme
das Vo

(4) {

also is
schnitt

(5)

wo die
rechte
sche K
der el
halbe

(7) E

wo u, v, w die Stromcomponenten, k die Leitungsfähigkeit der Substanz des Ringes bezeichnet. Sind m Windungslagen vorhanden, welche eine Schicht von der Dicke α_0 bilden, so hat man nur statt P :

$$\frac{m}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} P du$$

zu setzen.

Da diese Ringströme dieselben sind, als wenn der Ring ruhte (oder da sie als im Raume unbeweglich zu betrachten sind), so erzeugen sie, ausser dass sie den Ringmagnetismus verändern, auch direct an den sich drehenden Ringwindungen electromotorische Kräfte, dieselben, welche sich auch ergeben würden, wenn man Ring und Windungen als ruhend und in jedem Raumpunkt p_ϕ im Inneren des Ringes den diesem Punkt entsprechenden Strom entstehend und den dem Punkt $p_\phi - d\phi$ entsprechenden Strom verschwindend annähme. Um diese electromotorische Kraft zu berechnen, wollen wir den Ring als einen Hohlcyylinder und jede Windung als ein in einer durch die Axe gehenden Ebene liegendes Rechteck annehmen. Die Componenten des Vectorpotentials der Ringströme in einem Punkt (x, y, z) einer Windung sind die über das Volumen des Ringes erstreckten Integrale:

$$(4) \quad \begin{cases} F_x = \int \frac{u'}{r} d\tau' = -n h k i \int \frac{dP}{dz'} \frac{d\tau'}{r}, & F_y = 0, \\ F_z = \int \frac{w'}{r} d\tau' = n h k i \int \frac{dP}{dx'} \frac{d\tau'}{r}; \end{cases}$$

also ist das Potential der Ringströme auf eine im Querschnitt ϑ liegende Ringwindung:

$$(5) \quad Q = \int F_\varrho d\varrho + \int F_z dz = \cos \vartheta \int F_x d\varrho + \int F_z dz,$$

wo die Integration nach ϱ und z sich über den Umfang der rechteckigen Windung erstreckt. Die ganze electromotorische Kraft dieser Ringströme, d. h. der zeitliche Mittelwerth der electromotorischen Kraft auf alle $\frac{1}{2}n$ Windungen für eine halbe Umdrehung, ist also:

$$(7) \quad E = -n h \int \frac{dQ}{dt} dt = -n h \int_0^\pi \frac{dQ}{d\vartheta} d\vartheta = n h (Q_0 - Q_\pi) = 2 n h Q_0,$$

da Q als Function von ϑ sich in der Form $\sum_0^{\infty} a_s \cos(2s+1)\vartheta$ entwickeln lässt.

Die Componenten der zwischen diesen Ringströmen und den festen Electromagneten wirkenden ponderomotorischen Kraft sind, wenn V das magnetische Potential der festen Electromagnete bezeichnet:

$$\begin{aligned} X &= v \frac{dV}{dz} - w \frac{dV}{dy} = -nhki \frac{dP}{dx} \frac{dV}{dy}, \\ Y &= w \frac{dV}{dx} - u \frac{dV}{dz} = nhki \left(\frac{dP}{dx} \frac{dV}{dx} + \frac{dP}{dz} \frac{dV}{dz} \right), \\ Z &= u \frac{dV}{dy} - v \frac{dV}{dx} = -nhki \frac{dP}{dz} \frac{dV}{dy}, \end{aligned}$$

also die in der Zeiteinheit von diesen Kräften bei der Drehung des Ringes geleistete Arbeit, wenn v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes des Ringes, $d\tau$ sein Volumelement bezeichnet:

$$\begin{aligned} A &= \int (Xv_x + Yv_y + Zv_z) d\tau = 2\pi nh^2 ki \int \left[\frac{dP}{dx} \frac{dV}{dy} \sin \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dP}{dx} \frac{dV}{dx} + \frac{dP}{dz} \frac{dV}{dz} \right) \cos \vartheta \right] \rho d\tau, \text{ also:} \\ (8) \quad A &= 2\pi nh^2 ki \int \left(\frac{dP}{dx} \frac{dV}{d\varrho} + \frac{dP}{dz} \frac{dV}{dz} \cos \vartheta \right) \rho d\tau. \end{aligned}$$

Ferner werden auch durch die festen Electromagnete im Inneren des Ringes Ströme erzeugt; es lässt sich aber nachweisen, dass die electromotorische Kraft, welche durch dieses zweite System von Ringströmen in den Ringwindungen hervorgerufen wird, $= 0$ ist. Die Componenten der durch die festen Electromagnete im Inneren des Ringes erzeugten electromotorischen Kraft sind nämlich, wenn wieder V das magnetische Potential der festen Electromagnete in einem Punkt (ϱ, ϑ, z) des Ringes bezeichnet, analog der Gl. (1_a):

$$E_x' = 2\pi h \varrho \frac{dV}{dz} \cos \vartheta, \quad E_y' = 2\pi h \varrho \frac{dV}{dz} \sin \vartheta, \quad E_z' = -2\pi h \varrho \frac{dV}{d\varrho},$$

also die erzeugten Stromcomponenten, wenn wir $2\pi hh = x$ setzen:

$$(9) \quad u_1 = x \varrho \frac{dV}{dz} \cos \vartheta, \quad v_1 = x \varrho \frac{dV}{dz} \sin \vartheta, \quad w_1 = -x \varrho \frac{dV}{d\varrho}.$$

Diese Ströme verlaufen also innerhalb jedes durch die Drehungsaxe gelegten Ringquerschnittes; setzen wir die über das Ringvolumen ausgedehnten Integrale:

$$\int \frac{u_1}{r} d\tau' = F_x \text{ etc.,}$$

so ist das Potential dieses Stromsystems auf eine im Querschnitt ϑ liegende Ringwindung:

$$Q_1 = \int (F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta) d\varrho + \int F_z dz,$$

wo die Integrale nach ϱ und z sich wieder über den Umfang einer Windung erstrecken. Nun lässt sich zeigen, dass sich V als Function von ϑ in eine Reihe von der Form:

$$V = \sum_0^{\infty} a_n \sin (2n + 1) \vartheta$$

entwickeln lässt; es wird also auch:

$$F_x = -\kappa \int \varrho' \frac{dV'}{d\varrho'} \frac{d\tau'}{r} = \sum b_n \sin (2n + 1) \vartheta.$$

Ferner wird:

$$u_1 = \kappa \varrho \frac{dV}{dz} \cos \vartheta = \sum a_n \sin (2n + 1) \vartheta \cos \vartheta = \sum \beta_n \sin 2n \vartheta,$$

$$v_1 = \kappa \varrho \frac{dV}{dz} \sin \vartheta = \sum a_n \sin (2n + 1) \vartheta \sin \vartheta = \sum \gamma_n \cos 2n \vartheta,$$

also auch:

$$F_x = \sum c_n \sin 2n \vartheta, \quad F_y = \sum c_n' \cos 2n \vartheta,$$

$$F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta = \sum d_n \sin (2n + 1) \vartheta,$$

also:

$$Q_1 = \sum q_n \sin (2n + 1) \vartheta.$$

Die Aenderung des electrodynamischen Potentials einer Windung für eine halbe Umdrehung, mit welcher die electromotorische Kraft proportional ist, ist also:

$$Q_1 (\vartheta = \pi) - Q_1 (\vartheta = 0) = 0.$$

Die ganze, direct von den Ringströmen (d. h. abgesehen von dem durch sie erzeugten Ringmagnetismus) herrührende electromotorische Kraft ist also die durch die Gl. (7) dargestellte; ebenso lässt sich zeigen, dass auch derjenige Theil der electromotorischen Kraft verschwindet, welcher von dem durch das zweite System von Ringströmen inducirten Ring-

magnetismus herrührt. Bei Bestimmung der ganzen von den Ringströmen direct oder indirect herrührenden electromotorischen Kraft kann man also die Ringströme unter der Annahme berechnen, dass der Ring ruhe.

Dagegen leisten die ponderomotorischen Kräfte, welche zwischen diesem zweiten, durch die Gl. (9) dargestellten System von Ringströmen und dem festen Electromagnet wirken, selbstverständlich eine (negative) Arbeit A_1 bei der Drehung des Ringes. Diese Kräfte sind:

$$X_1 = v_1 \frac{dV}{dz} - w_1 \frac{dV}{dy} = z \varrho \left[\left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \sin \vartheta + \frac{dV}{d\varrho} \frac{dV}{dy} \right],$$

$$Y_1 = w_1 \frac{dV}{dx} - u_1 \frac{dV}{dz} = -z \varrho \left[\left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \cos \vartheta + \frac{dV}{d\varrho} \frac{dV}{dx} \right],$$

also ist:

$$A_1 = \int (X_1 v_x + Y_1 v_y) d\tau = -2\pi h z \int \left[\left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \frac{dV}{d\varrho} \frac{dV}{dy} \sin \vartheta + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \frac{dV}{d\varrho} \frac{dV}{dx} \cos \vartheta \right] \varrho^2 d\tau,$$

$$\text{d. h. (8a)} \quad A_1 = -4\pi^2 h^2 k \int \left[\left(\frac{dV}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dV}{d\varrho} \right)^2 \right] \varrho^2 d\tau.$$

Diese Arbeit ist also zu der durch Gl. (8) bestimmten hinzuzufügen, um die ganze, direct von den Ringströmen herrührende ponderomotorische Arbeit zu erhalten.

Die weitere Ausführung der im Vorstehenden angedeuteten Rechnungen behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

Strassburg, 10. Nov. 1886.

A
Folgen
und f
bekan
aussen
schein
Arbei
misch
Wiede
im Zu
I
jener
von d
1
komm
zu, w
lichen
von d
I
welch
der in
fasst.